

Gefördert durch die **Robert-Bosch-Stiftung**

BA Fachbezogene Bildungswissenschaft

Handreichungen zur Entwicklung der

**Mathematikdidaktik
im Elementarbereich**

**Entwicklung, Diagnose und
Frühförderung mathematischer
Kompetenzen im Elementar- und
Primarbereich**

Natascha Korff

Herausgegeben von **Prof. Dr. Dagmar Bönig**



Universität Bremen

Hochschuldidaktische Handreichung

Entwicklung, Diagnose und Frühförderung mathematischer Kompetenzen im Elementar- und Primarbereich

Natascha Korff

Handreichungen zur Entwicklung der
Mathematikdidaktik
im Elementarbereich
BA Fachbezogene Bildungswissenschaft

Impressum

Herausgegeben von
Prof. Dr.
Dagmar Bönig

Layoutvorlage
Birte Meyer-Wülfing

Foto Titelbild
Sandra Langendorf

Gefördert durch die
Robert-Bosch-Stiftung

Bremen, Januar 2008

Die Reihe

Die „Hochschuldidaktischen Handreichungen“ zur Entwicklung der Mathematikdidaktik in der Elementarbildung sind Teil der Arbeit an der Studiengangsentwicklung „Bachelor of Arts (BA) Fachbezogene Bildungswissenschaften“ an der Universität Bremen. In diesem polyvalenten Studiengang können sich Studierende für eine Tätigkeit im Elementarbereich und/oder in der Schule qualifizieren. Dieser Studiengang entstand in Zusammenarbeit eines Hochschulverbundes mit der Robert-Bosch-Stiftung ([PiK: Profis in Kitas](#)). Die vorliegenden Bremer Handreichungen skizzieren ein professionsorientiertes Curriculum für die Mathematikdidaktische Arbeit im Elementarbereich.

Die Handreichungen sind digital erhältlich unter www.profis-in-kitas.de

Die Herausgeberin

Dr. Dagmar Bönig

ist Professorin für Mathematikdidaktik an der Universität Bremen.

Die Autorin

Natascha Korff

ist wissenschaftliche Mitarbeiterin im Arbeitsgebiet Inklusive Pädagogik an der Universität Bremen. Zurzeit arbeitet sie im Forschungsprojekt „Förderung von Kindern mit Behinderung unter drei Jahren“ und promoviert zum Thema „Inklusive Mathematikdidaktik“.

Kontakt

Dagmar Bönig: www.primary.uni-bremen.de/mathe

Natascha Korff: <http://www-user.uni-bremen.de/~nkorff>

Inhalt

Inhalt	4
A Zielsetzungen	5
B Theoretische Einführung	10
C Themen der Modulveranstaltung	22
Vorläuferfähigkeiten und Schulbeginn	22
Vorläuferfähigkeiten I: Zahlbegriffsentwicklung	24
Grundlagen von Rechenprozessen	26
Vorläuferfähigkeiten II: Geometrie	29
Diagnostik	32
Mathematik in Kindergarten und Grundschule	36
Lernschwierigkeiten	38
Pädagogische Möglichkeiten	42
Empirische Erkundungen	44
D Anlagen	47
Literaturliste	64

A Zielsetzungen

„Also, Mathematikdidaktik, das ist, wenn ich genau hinschaue wie andere Mathematik machen“
Studentin, zit. nach Bönig, Wollring 2004, S.32

Gegenstand des Moduls „Entwicklung, Diagnose und Frühförderung mathematischer Kompetenzen im Elementar- und Primarbereich“ sind die frühe mathematische Entwicklung und ihre Bedeutung für den Anfangsunterricht.

Inhalte und Ziele

Das Modul fügt sich ein in das Gesamtkonzept des curricularen Bausteins „Mathematische Vorläuferfähigkeiten“ und trägt damit zu dem Ziel bei, dass die Studierenden „die Kompetenz erwerben, ein Gespür für die Momente zu entwickeln, in denen Kinder mit dem Aufbau mathematischer Strukturen beschäftigt sind“ (vgl. `Curricularer Baustein Mathematik Bremen`, unveröffentlichter Entwurf von B. Daiber). Die Studierenden sollen im vorliegenden Modul insbesondere zu Erkenntnissen bezüglich der Entwicklung mathematischer Vorläuferfähigkeiten und der Zahlbegriffsentwicklung gelangen, sowie die Fähigkeit ihrer diagnostischen Erfassung erwerben. Dies bildet die Basis für die Kompetenz „Lernumgebungen gestalten und Materialien auswählen [zu] können, die geeignet sind, mathematisches Denken und Handeln kindgemäß zu ermöglichen und zu fördern“ (ebd.).

Das Modul richtet sich, entsprechend der Konzeption des Bachelorstudienganges „Fachbezogene Bildungswissenschaften mit Schwerpunkt Grundschule/Elementarbereich“ in Bremen, an Studierende mit dem Ziel des Grundschullehramtes in Kombination mit Elementarpädagogik. Dies ermöglicht sowohl einen Austausch als auch die Gelegenheit beidseitiger Reflexion zweier pädagogischer Arbeitsfelder. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die Arbeit im eigenen pädagogischen Feld mit den vorangehenden bzw. nachfolgenden Erfahrungen der Kinder in Beziehung zu setzen und so auch ihre Entwicklung besser einordnen zu können. Zugleich ähneln Inhalte und in weiten Teilen auch Methoden der vorschulischen Unterstützung mathematischer Entwicklung dem was im Bereich von Prävention und Intervention bei Lernschwierigkeiten in den ersten Schuljahren notwendig ist

Insbesondere geht es um grundlegende Fragen diagnostischer Beobachtung mathematischer Lernvoraussetzungen und daraus resultierenden Fördermöglichkeiten, sowie Überlegungen zu unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und den Umgang mit selbigen im mathematischen Anfangsunterricht. Darüber hinaus sollen Lernschwierigkeiten im Bereich Mathematik und Möglichkeiten der frühzeitigen Diagnose angesprochen werden. Spezielle Probleme psychologischer Diagnostik und der Förderung bei Lernschwierigkeiten im Schulalter sind nicht mehr Gegenstand des Moduls.

Die Studierenden sollen befähigt werden auf Grundlage des Verständnisses kindlichen mathematischen Denkens, die Kinder von Beginn an auf dem Weg des mathematischen Denkens zu begleiten. Die thematisierten Entwicklungsbereiche bilden die Gebiete der mathematischen Entwicklung im Vorschulalter ab, die die entscheidenden Grundlagen für den Erfolg in der Schulmathematik darstellen. Ein Schwerpunkt des Moduls liegt dabei auf arithmetischen Kompetenzen und der Entwicklung zum kompetenten Rechner. Im Elementarbereich müssen Situationen erkannt werden, die die Entwicklung des mathematischen Denkens anregen und den Kindern damit neben der allgemeinen kognitiven Entwicklung einen erfolgreichen Start in den Anfangsunterricht ermöglichen. Im Übergang zur Primarstufe muss es gelingen, die Lernausgangslagen der Schüler zu erfassen und angemessen auf sie zu reagieren.

Die Studierenden sollen insbesondere die Fähigkeit entwickeln, solche Kinder zu unterstützen, die aufgrund geringer Anregung im familiären Umfeld noch keine ausreichende Gelegenheit hatten, grundlegende mathematische Kompetenzen zu entfalten.

Aus diesen angestrebten Kompetenzen ergeben sich die nachfolgenden Ziele für das Modul:

Im Bereich der theoretischen Kenntnisse sollen sich die Studierenden elementare Grundbegriffe, zentrale Erklärungszusammenhänge und die wichtigsten empirischen Ergebnisse in folgenden Bereichen aneignen:

- mathematische Entwicklung (im Vorschulalter)
- Inhaltsbereiche der vorschulischen mathematischen Entwicklung
- zentrale Vorläuferfähigkeiten (vorschulische mathematische Kompetenzen) und ihr Zusammenwirken beim Erwerb erster schulmathematischer Inhalte
- prognostisches Potential von Vorläuferfähigkeiten bezogen auf spätere Lernschwierigkeiten
- Basiskenntnisse zu verschiedenen Erklärungsmodellen mathematischer Lernschwierigkeiten und ihrer Entwicklung
- Bedeutung des zählenden Rechnens im Bereich mathematischer Lernschwierigkeiten
- Basiskenntnisse zur Strukturierung und Zielsetzung unterschiedlicher Test-, Diagnose- und Beobachtungsformen
- Kenntnis zentraler Diagnose- und Beobachtungsinstrumente und ihrer Anwendungsfelder.

Die genannten theoretischen Kenntnisse sollen von den Studierenden, bezogen auf eine förderungsorientierte Diagnostik, in den verschiedenen Bereichen angewendet werden können.

Das bedeutet den Erwerb folgender praxisbezogener Fertigkeiten:

- Entwicklung von diagnostischen Aufgaben zu einzelnen (vorschulischen) mathematischen Kompetenzen
- Gestaltung von (Alltags-) Situationen, die eine diagnostische Beobachtung ermöglichen
- Dokumentation von diagnostischen Erkenntnissen
- Analyse und Reflexion der Zielsetzungen und des Nutzens von diagnostischen Materialien und Fördermaterialien und deren Anpassung an eine (Lern-) Gruppe oder einzelne Kinder.
- Schlussfolgerung aus diagnostischen Erkenntnissen bezüglich notwendiger Anregungen und Förderung
- Entwicklung von Aufgaben oder Lernumgebungen zur Förderung grundlegender mathematischer Kompetenzen
- Früherkennung von Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht und Basisfertigkeiten im Bereich der Einbindung der Erkenntnisse in die Gestaltung des mathematischen Anfangsunterrichtes

Ziel ist es also, dass die Studierenden wichtige Grundbegriffe und theoretische Hintergründe kennen und das Wissen zu den verschiedenen Entwicklungsbereichen diagnostisch und bezogen auf Förderung anwenden und reflektieren können.

Aufbau und Anliegen des Handbuches

Das vorliegende Handbuch zum Modul „Entwicklung, Diagnose und Frühförderung mathematischer Kompetenzen im Elementar- und Primarbereich“ dokumentiert die geplante Durchführung des Moduls am Standort Bremen und kann dabei zugleich als Grundlage für eine Implementierung des Moduls auch an anderen Standorten dienen.

Das Handbuch bezieht sich damit sowohl auf theoretische Hintergründe der zu vermittelnden Inhalte, als auch auf deren didaktische Aufbereitung im Rahmen einer zweisemestrigen universitären Veranstaltung (4 SWS, 6CP). Neben der theoretischen Einführung und der Darstellung der didaktischen Grundstruktur des Moduls enthält das Handbuch im Hauptteil Ausführungen zu den einzelnen Themen des Moduls und deren Gestaltung als Seminarsitzungen im Rahmen einer exemplarischen Seminarstruktur. Zu den ausgearbeiteten Themenbereichen/Sitzungen werden – neben einer kurzen Einführung in das Thema der jeweiligen Sitzung – Hinweise zu den Lernzielen und einem möglichen Vorgehen gegeben, sowie Arbeitsmaterialien und Literaturhinweise zur Verfügung gestellt. Letztere beschränken sich auf solche Literatur, die sich insbesondere für die Bearbeitung mit den Studierenden eignet. Eine ausführliche Bibliografie und ein Vorschlag zur zeitlichen Strukturierung der zweisemestrigen Veranstaltung finden sich am Ende des Handbuches. Die im Hauptteil ausgearbeiteten Inhaltsbereiche sind dabei zum Teil für mehrere Seminarsitzungen vorgesehen.

In der im Modulhandbuch enthaltenen beispielhaften Planung ist – auch im Sinne eines Überblicks für Dozent/innen an anderen Standorten – eine Behandlung aller zentralen Themen vorgesehen. Dadurch reduziert sich der Umfang der Behandlung der einzelnen Aspekte. So ließen sich bei entsprechender Vertiefung die Themenkomplexe der einzelnen Sitzungen auch als Gegenstand für ein gesamtes Seminar ausarbeiten.

Dozent/innen an anderen Standorten sollten in Abhängigkeit der Vorkenntnisse der Studierenden, der Gruppengröße und der zur Verfügung stehenden Seminarzeit Anpassungen vornehmen, bzw. eigene Schwerpunkte setzen.

Grundsätzliche hochschuldidaktische Überlegungen zur Gestaltung des Moduls

Das Ziel universitärer Lehre ist es, den Studierenden zu ermöglichen, sich zu reflektierten und theoriegeleiteten Praktiker/innen zu entwickeln. Im Sinne dieser Professionalisierung ist es notwendig, den Studierenden grundlegende Fertigkeiten des wissenschaftlichen Arbeitens, einen Überblick über den aktuellen Forschungsstand und zugleich Handlungswissen für die berufliche Praxis zu vermitteln. Dies sollte in einer Art und Weise geschehen, die es den Studierenden ermöglicht, die Relevanz der erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten für ihr späteres Berufsziel zu erkennen und sich zugleich in der Wissenschaft zu verorten.

Die Erarbeitung verschiedener theoretischer Konzepte und Handlungsstrategien muss daher mit der Erfahrung einer konkreten Umsetzung ebenso verknüpft werden, wie mit einer kritischen Reflexion.

Als zentrales Element des vorliegenden Moduls ist die Arbeit mit exemplarischen Materialien zu sehen. Dabei kann es sich z.B. um eine Schulbuchseite, einen Stundenentwurf, ein Kinderprodukt, einen Beobachtungsbogen oder ein Video handeln. Diese Materialien können in verschiedener Weise bearbeitet werden:

- Das Material wird vor dem Hintergrund eines oder mehrerer theoretischer Konzepte analysiert, eingeordnet und bewertet.
- Die Studierenden entwickeln unter Bezugnahme auf zuvor erarbeitetes theoretisches Wissen praxisorientierte Materialien.
- Aus der Analyse und Diskussion des konkreten Materials wird eine allgemeine Erkenntnis oder These abgeleitet, die anschließend in einen theoretischen Kontext gesetzt wird.

Für die Struktur der Seminarsitzungen ergibt sich damit ein Wechsel aus Phasen von einerseits eigenständiger Erarbeitung und Diskussion von Inhalten durch die Studierenden und andererseits Vortragsanteilen, die sich im Sinne eines einleitenden Überblicks oder einer zusammenfassenden Einordnung auf das Erarbeitete beziehen. Begleitende oder vorbereitende Lektüre vertieft und festigt die erworbenen Kenntnisse. Die Erprobung und Reflexion der angestrebten Kompetenzen im Seminar – beispielsweise durch die Entwicklung von Diagnosematerialien oder die Arbeit mit Fallbeispielen – ermöglicht es, die Praxisrelevanz der behandelten Themen für die Studierenden erfahrbar zu machen und fördert die Durchdringung des Lernstoffes. Zugleich erhalten die Lehrenden eine direkte Rückmeldung über die Kompetenzen der Studierenden.

Über diese Ausrichtung der einzelnen Seminarsitzungen an der aktiven Umsetzung des Wissens hinaus, ist das Seminar auch in seiner Gesamtstruktur auf die Erstellung eines praxisbezogenen Produktes orientiert sein. Zwischen den beiden Semestern sollen die Studierenden eine empirische Erkundung in Form einer kleineren, förderdiagnostischen Fallstudie durchführen. So erhält die Zusammenführung der erarbeiteten Inhalte und ihre Anwendung eine reale Zielsetzung. Das Verstehen des neu Erlernten wird Grundlage für eine erfolgreiche Handlung und bestärkt damit die Sinnhaftigkeit des Lernprozesses. Dies regt die Studierenden zu einer intensiven Auseinandersetzung mit den behandelten Inhalten und theoretischen Konzeptionen an. Zugleich wird konkret die Entwicklung von theoriegeleiteter Handlungskompetenz gefördert.

Die bisherige Erprobung solcher auf die Durchführung eigener Praxis hin konzipierten Seminare¹ hat gezeigt, dass die Studierenden über die Einführung und Erprobung der einzelnen Bausteine im Seminar und der Möglichkeit der gegenseitigen Reflexion hinaus noch eine eingehende Beratung hinsichtlich der Umsetzung der eigenen Ideen benötigen. Dies ist in der Gesamtgruppe kaum leistbar. In den aus bisherigen Seminaren entstandenen Abschlussberichten wird auch deutlich, dass eine gewinnbringende Reflexion der eigenen Praxis nur einem Teil der Studierenden auf Anhieb gelingt. Wenn eine umfassende individuelle Kommentierung und Anregung durch die Seminarleitung erst in der Korrektur der schriftlichen Ausarbeitungen der Studierenden erfolgt, kann sie jedoch kaum Wirkung entfalten. Denn sollte diese von den Studierenden nur nachträglich zur Kenntnis genommen werden, wird dadurch eine wirkliche Auseinandersetzung nur in geringem Maße stattfinden.

Im Seminaaraufbau ist aus diesem Grund an mehreren Stellen der Austausch über die eigenen Planungen anhand von *Peer-Reviews* vorgesehen, sowie vom/von der Dozierenden angeleitete Reflexionen einzelner Probleme/Fragen in der Gesamtgruppe. Wichtig ist hierbei, dass die Reflexion auf verschiedenen Ebenen stattfindet:

- Kritische Analyse fremder und Überarbeitung der eigenen Entwürfe im Rahmen des *Peer-Review-Verfahrens*,
- Besprechung genereller Fragen, die den Dozent/innen bei Durchsicht der Entwürfe auffallen,
- Fundierte Begründung der eigenen Planung innerhalb ihrer Verschriftlichung und die
- Analyse und Reflexion der eigenen Ergebnisse und der eigenen Durchführung in Vorbereitung eines „Marktes der Kindergedanken“ (s. Kapitel „Empirische Erkundungen“, S.41f) und im Hinblick auf das Kolloquium zu pädagogischen Indikationen.

Ein weiterer Ertrag ist, dass die Studierenden von den jeweils anderen Gruppen und deren Ideen profitieren können und sich in der kritischen fachlichen Auseinandersetzung üben, und dies sowohl auf der Ebene der Planung als auch der der Analyse von Kinder- und Pädagog/innenhandeln. Wenn die zur Verfügung stehenden *Credits* und Seminarzeiten es zulassen, wäre es in diesem Zusammenhang sicherlich wünschenswert, wenn neben der Diagnose im ersten Semester auch die Förderung im zweiten Semester nicht nur auf der Ebene der Planung verbliebe, sondern ihre konkrete Umsetzung nebst deren Reflexion möglich wäre. Dies könnte nach einem ähnlichen Muster wie dem der Planung und Durchführung der Diagnose erfolgen. Denkbar wäre u.a. auch, die Aufgaben Diagnose und Förderung unter den Studierenden aufzuteilen, oder auf Basis einer Fremddiagnose, wie sie z.B. bei

¹ z.B. Vorbereitung der „Bremer Kinder Uni“ und von Projektwochen, sowie Seminare mit Ziel der Durchführung diagnostischer Interviews mit lernschwachen Schüler/innen

Förderkindern oft vorliegt, direkt mit der Planung von Förderung zu beginnen. Generell erscheint es jedoch im ersten Zugriff sinnvoller, eine Diagnose ohne folgende Förderung durchzuführen als umgekehrt, da die Studierenden sich so in jedem Fall intensiv mit den mathematischen Kompetenzen eines einzelnen Kindes auseinandersetzen können. Zudem entspricht dieses Vorgehen der Annahme, dass die Güte der Förderung in großen Teilen von der Fähigkeit zu theoriegeleiteter Diagnose abhängt. Wie oben bereits erwähnt, müssen solche Entscheidungen seitens der Dozent/innen letztlich stets in Abhängigkeit von Vorwissen, Interessen und Arbeitszeit der Studierenden erfolgen.

B Theoretische Einführung

"Während der Kindergartenzeit entwickeln sich die entscheidenden Vorläuferfähigkeiten für die schulischen Lernprozesse."

Faust-Siehl 2001, S.74

Diese Erkenntnis gilt für verschiedene Lernbereiche und insbesondere auch für das mathematische Lernen. Spätestens mit Einführung der Bildungspläne sind mathematische Inhalte auch Thema der vorschulischen Bildung. Dies sollte aber keineswegs lediglich einen vorverlegten Beginn des schulmathematischen Unterrichts nach sich ziehen, sondern auf einen bewussten Umgang mit mathematischen Alltagserfahrungen der Kinder abzielen. Zugleich muss sich der schulmathematische Erstunterricht daran anpassen, dass viele Kinder bereits mit einem umfangreichen Wissen und Erfahrungen in die Schule kommen, ebenso wie einige Kindern, die kaum mathematische Vorerfahrung mitbringen.

So schließt Stern u.a. aus den Ergebnissen der LOGIK-Studie, dass interindividuelle Unterschiede in den Mathematikleistungen sich nicht einfach auf Dysfunktionen des Gehirns oder Intelligenzunterschiede zurückführen lassen. Vielmehr ist die Korrelation der Vorkenntnisse vor der Schule, bzw. der Mathematikleistungen im zweiten Schuljahr mit späteren schulischen Leistungen (in der 12. Klasse) höher, als die mit der gemessenen Intelligenz (vgl. Stern 2003).

Zugleich konnte nachgewiesen werden, dass die anhand der Vorläuferfähigkeiten bei Schuleintritt als Risikokinder identifizierte Gruppe am Ende des zweiten Schuljahres zu den leistungsschwächsten Kindern der Klassen gehörten. Diejenigen Kinder der Risikogruppe, welche eine Förderung erhielten, schnitten hingegen mindestens durchschnittlich, z.T. auch überdurchschnittlich ab (vgl. u.a. Kaufmann 2003, Grüßing 2007)². Die Schüler unterscheiden sich hierbei bereits zu Schulbeginn nicht nur im Umfang ihres Wissens, sondern auch in ihren Lösungsstrategien (vgl. u.a. Hasemann 2001, Heide 2005).

Der Förderung mathematischer Kompetenzen im Vorschulalter und der diagnostischen Einschätzung vorhandener Fähigkeiten, insbesondere im Übergang von Kindergarten zu Schule, kommt somit eine große Bedeutung zu.

Die Grundlage für die Entwicklung eines mathematischen Grundverständnisses wird bereits in den ersten Entwicklungsschritten gelegt. Daher erweist sich sowohl die Förderung der frühen mathematischen Kompetenzen im Elementarbereich, als auch die kompetente Diagnose der mathematischen (Vorläufer-) Fertigkeiten zu Schulbeginn als fundamental für die Verhinderung von späteren „Lernschwierigkeiten“ im Mathematikunterricht, bzw. bildet die Basis für ein erfolgreiches mathematisches Lernen aller Kinder.

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen beginnt bereits im Säuglingsalter und umfasst im weitesten Sinne die Strukturierung von Umwelt, das Erkennen und Nutzen von Beziehungen und die allmähliche Abstraktion dieser Kenntnisse von der konkreten Umwelt, also die Entwicklung logisch-analytischen Denkens. Im engeren Sinne geht es um die Entwicklung des Zahlbegriffs, des räumlichen Vorstellungsvermögens und der Fähigkeit des Modellbildens, sowie – insbesondere im Zuge des mathematischen Anfangsunterrichts – die Ausbildung des Verständnisses von Rechenoperationen und die Aneignung von Rechenstrategien. Die aktive Auseinandersetzung mit der Umwelt und

² Weiterführend kann in diesem Zusammenhang auf die Verfestigung der sozialen Ungleichheit im Bildungssystem verwiesen werden. So stellt der UN Sonderberichtersteller fest, dass u.a. im Rahmen des PISA-Programms gezeigt wurde, dass in Deutschland ein enger Zusammenhang zwischen sozialem/Migrationshintergrund der Schüler/innen und den Bildungsergebnissen besteht (vgl. Munoz 2006).

mathematischen Strukturen führt zu einem integrierten Verständnis der verschiedenen Zahlaspekte und dem flexiblen Umgang mit Zahlen und Zahlbeziehungen.

Im Folgenden sollen zunächst die mathematischen Entwicklungen dargelegt werden, die in der Regel vor der systematischen Unterweisung im Anfangsunterricht stattfinden, bzw. dessen Grundlage bilden. Die Kenntnis dieser Aspekte, ihrer Bedeutung und der Möglichkeiten von Diagnose und Förderung, die im Anschluss thematisiert werden, sind Gegenstand des Moduls.

Zahlbegriffsentwicklung

Als klassische Arbeiten zur Entwicklung des (mathematisch-) logischen Denkens und der Zahlbegriffsentwicklung sind die Studien Jean Piagets zu bezeichnen. Piagets genetische Epistemologie hatte großen Einfluss auf die Forschung zur kognitiven Entwicklung im Kindesalter und prägt auch heute noch die Sicht von Lernen als einem aktiven konstruktiven Prozess über die handelnde Auseinandersetzung mit der Umwelt. Auch wenn verschiedene Aspekte von Piagets Arbeiten – wie die Bedeutung sprachlicher und versuchsanordnungsbedingter Irritationen und die bereichsübergreifende Anordnung seiner Entwicklungsstadien – aufgrund neuerer Studien kritisch betrachtet werden müssen, sind seine grundsätzlichen Erkenntnisse weiterhin von Bedeutung. Bezogen auf die mathematische Entwicklung ist vor allem Piagets Annahme, dass ein vollständig erworbener Invarianzbegriff die Voraussetzung für einen sinnvollen Umgang mit Zahlen ist, so nicht mehr haltbar. Zwar beinhaltet ein voll entwickelter Zahlbegriff das Verständnis dafür, dass eine Zahl eine immer gleichgroße Menge bezeichnet, unabhängig von der Beschaffenheit und Anordnung ihrer Elemente (Invarianz). Die Entwicklung hin zu diesem umfassenden Zahlbegriff erfolgt aber nicht nur durch die Erkenntnisse bezogen auf Mengen, sondern auch über die zunehmend komplexere Auseinandersetzung mit Zahlen und Ziffern (vgl. unten). Die von Piaget beschriebene Klassifikation und Seriation, ebenso wie das Invarianzverständnis, stellen also wichtige Teilaspekte der Zahlbegriffsentwicklung dar, können aber nicht als Voraussetzungen für die Auseinandersetzung mit Zahlen überhaupt gelten (vgl. zu einer detaillierten Auseinandersetzung mit der Zahlbegriffsentwicklung nach Piaget sowie einer kritischen Einordnung der Erkenntnisse u.a. Fuchs 2002, Krajewski 2003, Weißhaupt et al. 2006).

Klassifikation bezeichnet in diesem Zusammenhang, dass Kinder lernen, Dinge zu unterscheiden, auf bestimmte Merkmale hin zu fokussieren und anhand dieser Klassen zu bilden. Unter Seriation ist die Fähigkeit zum Vergleich und der Reihenbildung zu verstehen. Der Zahlbegriff entwickelt sich auf dieser Grundlage durch die Verschmelzung von Kardinal- und Ordinalaspekt durch empirische Abstraktion logisch mathematischer Gesetzmäßigkeiten im handelnden Umgang mit der Umwelt. Erst auf der Stufe der konkreten Operation ist dabei nach Piaget das wirkliche Verständnis abstrakter Zahlen möglich, die unabhängig von Art und Anordnung der Gegenstände eine bestimmte Anzahl repräsentieren und sich in einer bestimmten Reihenfolge ordnen lassen (vgl. u.a. Piaget 1975).

Nach aktuellen zählbasierten Ansätzen ist wie gesagt nicht mehr davon auszugehen, dass der Umgang mit Zahlen den oben geschilderten umfassenden operativen Zahlbegriff voraussetzt, sondern sich dieser vielmehr in der Auseinandersetzung mit Zahlen entwickelt (vgl. u.a. Wember 2003). Der zentrale Prozess der Zahlbegriffsentwicklung besteht in der allmählichen Verbindung von Zähl-/Zahl- und Mengenwissen (*skills integration model*, vgl. u.a. Grüßing et al. 2007, S.83).

Aktuelle Studien weisen nach, dass die Verknüpfung von frühem Zahl- und Mengenwissen als entscheidender Faktor zu betrachten ist und fehlende Fähigkeiten in diesen Bereichen eine relativ sichere Vorhersage späterer Rechenschwäche ermöglicht (vgl. u.a. Krajewski 2003).

Im Bereich des Zahl- und Zählwissens ist insbesondere der Erwerb der Zahlwortreihe und der Zählprinzipien von Bedeutung.

Der Erwerb der Zahlwortreihe lässt sich in verschiedene Stufen unterteilen (Fuson 1988):

- Zunächst erwirbt das Kind die Zahlwortreihe auf dem *string-level* wie ein Lied oder ein Gedicht, als undifferenziertes Wortganzes.

- Sobald einzelne Zahlworte als Einheiten wahrgenommen werden, aber ausschließlich in der festen Reihenfolge präsent sind, wird von der unbreakable list gesprochen.
- Auf der Stufe der breakable chain wird die unflexible Reihe zu einer teilweise flexiblen, bei der von jeder Zahl aus weitergezählt werden kann, d.h. nicht mehr nur ab der eins.
- Das folgende numerable-chain-level ist dadurch gekennzeichnet, dass von jeder Zahl aus eine bestimmte Anzahl von Schritten weiter gezählt werden kann und damit Teilketten abgezählt werden können (5, 6, 7 entspricht drei Schritten).
- Als bidirectional chain ist die Zahlwortreihe schließlich als vollständig reversible Reihe verfügbar. Von jeder Zahl kann nun vor- und rückwärts gezählt werden.

Gelman und Galistel (1978) haben Prinzipien beschrieben, die das Zählen von Objekten erfordert. Auch wenn ihre Annahme, dass diese Prinzipien angeboren seien (*principles-first-Ansatz*), widerlegt wurde, gelten die von ihnen beschriebenen Zählprinzipien weiterhin als zutreffend.

- So muss ein Kind das one-one-principle (Eins-zu-eins-Zuordnung) und das stable-order-principle, also eine stabile Reihenfolge der Zahlwörter, anwenden, um Objekte zu zählen.
- Mit dem cardinal-principle erwirbt das Kind das Wissen, dass die letzte Zahl, die beim Abzählen einer Menge genannt wird, deren Anzahl wiedergibt. Es findet hier also ein Übergang, bzw. die Verbindung von Ordinal- und Kardinalzahl statt.
- Schließlich wird mit dem item-kind-irrelevance und dem order-irrelevance-principle die Unabhängigkeit der Mengenbestimmung von Art und Anordnung der Gegenstände erkannt.

Neben diesem Zahl- und Zählwissen spielt vor allem das Mengenverständnis eine Rolle. Bereits Säuglinge verfügen über die Fähigkeiten, Mengen von bis zu drei Elementen perzeptiv zu unterscheiden. Dieses sogenannte *subitizing* bildet die Grundlage für die spätere Fähigkeit zur simultanen Anzahlerfassung als ein wichtiger Teil des *number sense* und der Strukturierung von Zahlbeziehungen. Resnick (1989) beschreibt vier Arten mathematischen Denkens vom Konkreten zum Abstrakten.

- Bereits im Bereich der Mathematics of protoquantity, die noch keinen Bezug zu Anzahlen enthält, sind mit dem *comparision-schema* und dem *increase/decrease-schema* ein Verständnis von mehr/weniger, Zu-/Abnahme vorhanden. Das *part-whole-schema*, das Kinder im Alter von 4-5 Jahren entwickeln, ist als Verständnis von Teil-Ganzes-Beziehungen ein wichtiges Fundament für die weitere mathematische Entwicklung und den Erwerb von Rechenfertigkeiten. Diese protoquantitativen Schemata werden mit dem Wissen über die Zahlwortreihe und ihrer Anwendung in Zählkontexten verbunden.
- Es folgt dann die Ebenen der Mathematics of quantities, in der Addition innerhalb bestimmter Kontexte möglich ist. So zeigen sich bereits im Vorschulalter erstaunliche informelle mathematische Fertigkeiten.
- Die Mathematics of numbers im Schulalter ermöglicht den abstrakten Umgang mit konkreten Zahlen, der zunehmend systematisiert wird.
- Schließlich werden auf der Ebene der Mathematics of operators generelle arithmetische Prinzipien, wie z.B. der Zusammenhang von Subtraktion und Addition, verstanden.

Die frühe arithmetische Entwicklung ist somit durch das aktive Konstruieren eines Zusammenhanges (oder: das aktive „In-Beziehung-Setzen“) von zunehmend flexiblem Zahlwissen und einer immer differenzierter wahrgenommenen Umwelt gekennzeichnet, wodurch wiederum Kategorisierung und Abstraktion möglich werden. Zählen ist ein zentrales Moment in diesem Prozess, da es die Verbindung zwischen konkreten, aber eingeschränkten Erfahrungen mit Mengen und den abstrakten, aber allgemeingültigen mathematischen Ideen ermöglicht.

Neben diesen entwicklungspsychologischen Herangehensweisen werden mit neurowissenschaftlich orientierten Modellen der Zahlverarbeitung die generellen Prozesse beschrieben, die bei der Verarbeitung von Zahlen im Gehirn ablaufen. Mit Deheanes *triple-code-model* werden drei Repräsentationsebenen beschrieben (vgl. zusammenfassend Krajewski 2003):

- Die analoge Repräsentation von Größen, d.h. ungefähre mengen- und größenmäßige Vorstellung,
- die visuell-arabische, also zifferngebundene Repräsentation und
- die auditiv-sprachliche Repräsentation, die dem Zählprozess und auswendig verfügbaren Zahlensätzen, wie etwa „sechs-mal-sech-gleich-sechunddreißig“, zugrunde liegen.

Auch wenn über den genauen Ablauf der Rechenprozesse und der Organisation der verschiedenen Repräsentationen und ihrer Verknüpfung noch keine Klarheit herrscht, ist zumindest deutlich, dass die verschiedenen Ebenen zur erfolgreichen Bearbeitung mathematischer Anforderungen integriert werden müssen.

Operationsverständnis

Ein weiterer wichtiger Aspekt mathematischer Entwicklung ist die Ausbildung des Operationsverständnisses, d.h. die Integration von Handlungserfahrungen und Vorstellungsbildern in operative Handlungen auf der Symbolebene. Unter Operationen sind nach Aebli (1961) und Bruner (1974) diejenigen Handlungen zu verstehen, welche nicht auf Basis konkreter Gegenstände erfolgen, sondern auf einer Ebene abstrakter Verinnerlichung stattfinden.

Die inhaltliche Vorstellung – beispielsweise davon, dass bei der Addition etwas „hinzukommt“ – stellt das Operationsverständnis dar. Die Verinnerlichung einer Operation erfolgt nach Aebli über vier Stufen:

- Effektiver Vollzug der Handlung,
- bildliche Darstellung,
- symbolische Darstellung und
- Automatisierung, bezogen auf Rechenaufgaben.

Bruner spricht in Anlehnung an Aebli von drei Repräsentationsmodi:

- Enaktive Darstellung,
- Ikonische Darstellung und
- Symbolische Darstellung.

Der Entwicklung dieser verschiedenen Ebenen ist im Unterricht Rechnung zu tragen (EIS-Prinzip). Anzustreben ist eine gute Koordination der verschiedenen Repräsentationsformen.

Um dies zu ermöglichen, bedarf es sowohl der inhaltlichen und vorstellungsmäßigen Füllung mathematischer Symbole, Operationen und Beziehungen, als auch der allmählichen Abstraktion von bereichsspezifischen Alltagserfahrungen durch Verknüpfung mit der Sprache und den Symbolen der Mathematik. Wenn kein ausreichendes Verständnis, z.B. auf der enaktiven Ebenen vorliegt oder die Repräsentationsformen nicht miteinander verknüpft werden, ist es nicht möglich, den symbolischen Operationen einen inhaltlichen Sinn zu geben, sodass diese dann nicht verstanden, sondern bestenfalls im Sinne einer Technik beherrscht werden. Diese Techniken – wie das zählende Rechnen – erweisen sich häufig zu Beginn eines Lernprozesses als recht erfolgreich, sodass die daraus resultierenden Probleme erst mit dem Fortschreiten im Stoff bemerkt werden. Jost u.a. haben dem Modell der drei Repräsentationsformen die „Ausdifferenzierung nach dem Grad der Abstraktion“ hinzugefügt. So kann eine enaktive, ikonische oder symbolische Repräsentation jeweils im Alltagsbereich, im konkreten Bereich, im semiabstrakten Bereich, im Abstraktionsbereich oder im Bereich der Einfälle

vorliegen. Beispielsweise finden sich Additionshandlungen auf der enaktiven Repräsentationsebene – im Alltagsbereich etwa beim Tischdecken oder auf dem Spielplatz, wenn Kinder dazu kommen. Ist eine solche Situation in einem Buch abgebildet, kann von bildlicher Repräsentation auf Alltagsebene gesprochen werden (vgl. Jost nach Moser Opitz 2006, S.20).

Visuelle Wahrnehmung/Raumvorstellung

Kinder machen in ihrer Entwicklung verschiedenste geometrische Erfahrungen. So spielen Fragen eine Rolle wie: Wo bin ich im Raum, was ist neben mir, unter mir? Welche Formen und Eigenschaften haben die Dinge, mit denen ich hantiere? Welche Muster entdecke ich in meiner Umwelt, wie kann ich selbst Muster produzieren?

Der erste Zugang ist bei all diesen Beispielen die konkrete Erfahrung. Angeleitet und angeregt durch Erwachsene (aber auch ältere Kinder) wird das Benennen der verschiedenen Wahrnehmungen und somit ihre Reflexion möglich. Bereits vor der sprachlichen Repräsentation ist Wahrnehmung jedoch ein aktiver, konstruktiver Prozess, der eng mit dem Wissen um die und den Vorstellungen von der Welt verbunden ist. So lässt sich beispielsweise in Entwicklungstests für Kleinkinder kaum zwischen den Items im Bereich visueller und auditiver Wahrnehmung und dem Bereich der kognitiven Entwicklung unterscheiden. Das Auge kann nur sehen und unterscheiden, was das Gehirn als relevant erkennt (vgl. u.a. Brügelmann 1992; Luria 1992).

Raumvorstellung und visuelle Wahrnehmung sind, neben ihrer Bedeutung für die Geometrie und die Orientierung in der Welt, wichtige Faktoren für die arithmetische Entwicklung, da Zahlen und ihre Beziehungen zueinander als räumliche Verhältnisse vorgestellt werden (vgl. u.a. Lorenz 2005). Zahlen haben beispielsweise Vorgänger/Nachfolger, die „vor“, bzw. „hinter“ ihnen angeordnet sind, und additive Vorgänge können als räumliches Vorwärtsgehen oder auch als ein Operieren mit Mengenbildern verstanden werden. Diese räumlich-visuellen Vorstellungsbilder stehen dabei in enger Verbindung zur sprachlichen Repräsentation. Visuelle Wahrnehmung kann zwar nicht mehr im Sinne des Konzeptes der Teilleistungsstörung als einziger Faktor in der Entwicklung einer Rechenschwäche gelten, Übungen in diesem Bereich erweisen sich aber insbesondere dann als effektiv, wenn sie inhaltsbezogen sind und nicht isoliert die Wahrnehmung trainieren (vgl. u.a. Kaufmann 2003). Ausgehend von der Entwicklung des eigenen Körperschemas differenziert sich die Wahrnehmung räumlicher Beziehungen nach und nach aus und kann zunehmend auch sprachlich wiedergegeben werden. Zunächst wird der eigene Körper als von der Umwelt abgegrenzt erkannt, dann seine Lage und Position im Raum und die Lage und Position weiterer Dinge im Raum im Verhältnis zum eigenen Körper wahrgenommen. Schließlich gelingt es auf Basis dieser Erfahrungen bildlich und in der reinen Vorstellung, die räumlichen Beziehungen von verschiedenen Gegenständen zueinander zu beurteilen und in der Vorstellung zu manipulieren.

Im Bereich der visuellen Wahrnehmung, der weit mehr umfasst als eine reine Sinnesleistung, entwickelt sich neben der Wahrnehmung räumlicher Beziehungen und der Raum-Lage die visuomotorische Koordination, die Figur-Grund-Unterscheidung und die Wahrnehmungskonstanz. Die Komponenten der visuellen Wahrnehmung nach Frostig (1972) sind dabei:

- *Visuomotorische Koordination* (Auge-Hand-Koordination), z.B. zu beobachten in der Fähigkeit, eine Schablone oder eine Linie nachzufahren. Hier ist darauf zu achten, dass eventuelle Schwierigkeiten mit der Feinmotorik die Fähigkeit beeinträchtigen können.
- *Figur-Grund-Unterscheidung*, die sich z.B. im Erkennen von „versteckten Figuren“ aus einer komplexeren optischen Gesamt/Hintergrundfigur zeigt.
- *Wahrnehmungskonstanz*, d.h. dass eine bestimmte Form unabhängig von ihrer Größe, Farbe oder Raumlage als gleich erkannt werden können.

- *Wahrnehmung räumlicher Beziehungen* bedeutet die räumlichen Beziehungen zwischen Objekten zu erkennen und beschreiben zu können, z.B. die Anordnung von Zahlen in einem 9er-Feld („die eins steht in der obersten Reihe, rechts“).
- Die *Wahrnehmung der Raum-Lage* bezieht sich auf die Beschreibung der räumlichen Beziehung vom Standpunkt eines Wahrnehmenden aus.

Die Komponenten der Raumvorstellung werden von verschiedenen Autoren unterschiedlich differenziert, generell geht es um die Orientierung in wirklichen oder gedanklichen Räumen, die Fähigkeiten Objekte oder räumliche Beziehungen im Gedanken reproduzieren zu können und mit diesen Vorstellungsinhalten gedanklich zu operieren (vgl. dazu Franke 2000, S.29ff).

Erste Rechenstrategie: Zählendes Rechnen

Die erste numerische, also symbolisch repräsentierte Rechenstrategie, das zählende Rechnen, wird dabei bereits vor dem Schuleintritt eigenständig von den meisten Kindern erworben. Die Technik des zählenden Rechnens entwickelt sich aus der Verbindung kompetenten, d.h. flexiblen und sicheren Zählens, dem Verständnis des Kardinalzahlprinzips und der Kenntnis um Mengenveränderungen.

Beginnend mit dem Auszählen einer Gesamtmenge von Gegenständen (die zuvor aus zwei Teilmengen materiell hergestellt wurde), werden die verwendeten Zählstrategien zunehmend effektiver. Vom „Alles-Zählen“, d.h. dem Zählen aller Elemente der Ergebnismenge gelangen Kinder zum „Weiterzählen vom ersten Summanden aus“, sowie zum „Weiterzählen vom größeren Summanden aus“ und schließlich gelingt auch das „(Weiter-)Zählen in Schritten“. Im Bereich der Subtraktion gibt es analoge Strategien. Es handelt sich also beim zählenden Rechnen um eine kompetente und zunächst effektive Strategie, die große Sicherheit bietet. Allerdings stellt das zählende Rechnen mit höheren Zahlen und ohne Hilfsmittel einen enormen Anspruch an Arbeitsgedächtnis, Konzentrations- und Merkfähigkeit. Ein klassischer Fehler, der in der Folge auftritt, ist das „Verzählen um genau eins“. Dennoch lösen viele Kinder mit dieser Strategie die Aufgaben im gesamten Zahlraum bis 20 so sicher und schnell, dass die Probleme oftmals erst mit dem Rechnen im 100er Raum beginnen. Kinder, die sich nicht über die Strategie des zählenden Rechnens hinausentwickeln, werden aber spätestens zu diesem Zeitpunkt als rechenschwache Schüler/innen auffallen, da die Strategie im 100er Raum hoch fehleranfällig wird und bei der Addition/Subtraktion zweistelliger Zahlen kaum mehr zu bewältigen ist. Insgesamt kann das Verharren im zählenden Rechnen als Hauptmerkmal rechenschwacher Schüler/innen gesehen werden.

Zugleich verhindert das Lösen aller Aufgaben im Zahlraum unter 20 durch Zählen Einsichten in Zahlbeziehungen, welche wiederum die Basis für ein kompetentes Rechnen jenseits des Zählens darstellen. Wird jede Aufgabe immer wieder neu abgezählt, sind die Zahlsätze weder auswendig verfügbar, noch besteht eine Einsicht in die Zahlerlegungen, die sich in diesen Zahlsätzen ausdrücken.

Mit zunehmendem Umgang mit Zahlen und Zahlsätzen sollten den Kindern verschiedene Zahlerlegungen (insbesondere der 5 und der 10) bewusst werden und ebenso wie die Kernaufgaben im 20er Raum (z.B. Verdopplungen) auswendig verfügbar sein. Auf diesem Weg gelangen Kinder zur Anwendung verschiedener operativer Strategien, wie dem Ableiten, dem Nutzen von Tauschaufgaben und dem gegensinnigen Verändern.

Diese im Zahlraum bis zwanzig zu erwerbenden Kopfrechenstrategien und die Einsicht ins Dezimalsystem sind die Grundlage, um das auf Dauer automatisierte kleine „Eins-plus-eins“ zur Bewältigung von Aufgaben in allen anderen Zahlräumen zu nutzen.

Diagnostik

Diagnostik kann mit unterschiedlichen Zielsetzungen erfolgen, etwa als Grundlage für die Gestaltung passender pädagogischer Angebote oder aber für Selektionsentscheidungen bezogen auf den Zugang oder Verbleib in Institutionen (z.B. Gutachten zur Sonderschulüberweisung), sowie im Rahmen von Schulentwicklung, bzw. Schulleistungsvergleichen wie der PISA Studie.

Klassische psychodiagnostische Testverfahren sind dabei standardisierte Instrumente, die sogenannten Testgütekriterien entsprechen müssen. Ein standardisierter Test muss (a) dem Anspruch der Objektivität genügen, das heißt die Testergebnisse sind unabhängig von der Person, die den Test durchführt. Bei einer Wiederholung des Tests mit der gleichen Person (bei zeitlich stabilen Merkmalen) sollte der Test (b) zum gleichen Ergebnis kommen (Reliabilität/Zuverlässigkeit) und ein Test sollte (c) das messen, auf das er abzielt und was er zu messen vorgibt (Validität/Gültigkeit). So sollte ein Test zum mathematischen Verständnis beispielsweise keine zu großen sprachlichen Hürden enthalten, die die Ergebnisse „verfälschen“ können.

Im Zuge der Erkenntnisse über die Heterogenität der Schüler/innen und dem schlechten Abschneiden deutscher Schüler/innen in der PISA Studie, wird unter anderem gefordert, dass Pädagog/innen und insbesondere Lehrer/innen eine höhere diagnostische Kompetenz aufweisen müssen, um auf die Bedürfnisse der Kinder angemessen eingehen zu können. Im Rahmen des pädagogischen Alltags kann Diagnostik in Form von Beobachtungen, der Analyse von Schüler/innenerzeugnissen, aber auch testähnlichen Überprüfungen in Einzel- oder Kleingruppenform durchgeführt werden. Neben ihrer Funktion der Leistungsbewertung, kann Diagnostik dabei als Grundlage der Planung der pädagogischen Angebote dienen, indem regelmäßig der Lernstand aller Schüler/innen erfasst wird. Oder es können im Sinne der Prävention „Risikokinder“ oder Schüler/innen mit bereits manifesten Problemen identifiziert und einer besonderen Unterstützung zugeführt werden. Wenn die Zielsetzung einer solchen Diagnostik die Bereitstellung von Informationen für eine angemessene Förderung der Kinder ist, wird sie häufig als Förderdiagnostik bezeichnet. Der Begriff entstand im Bereich der Sonderpädagogik in Abgrenzung zur standardisierten „Einweisungsdiagnostik“, die eine Entscheidungshilfe für selektive Prozesse darstellt und nur wenig Erkenntnisse für die weitere pädagogische Arbeit liefert. Hier ist allerdings anzumerken, dass sich die Frage, ob ein Instrument zur Selektion genutzt wird oder nicht, kaum anhand des Instrumentes, sondern nur anhand der Zielsetzung seines Einsatzes beantworten lässt.

Förderdiagnostik grenzt sich – neben der Zielsetzung – von standardisierter Diagnostik dadurch ab, dass zunächst weniger Wert auf klassische Testgütekriterien wie Validität und Reliabilität gelegt wird, die mit dem Versuch einer objektiven Distanznahme einhergehen. Im Kontrast dazu sollen die Fertigkeiten des Kindes kompetenzorientiert, emphatisch und ganzheitlich, d.h. unter Einbezug verschiedener Entwicklungs- und Umweltfaktoren erfasst werden. Dem Konzept der Förderdiagnostik liegt die Einsicht zu Grunde, dass nur auf Basis einer umfassenden und möglichst genauen Erfassung des Leistungsstandes, eine passende und damit gelingende Förderung möglich ist.

Es zeigt sich allerdings, dass sich aus der reinen Beobachtung und Diagnose von vorhandenen Kompetenzen niemals direkt Förderziele oder gar Förderkonzepte ableiten lassen. Dazu ist hingegen neben dem individuellen Blick auf das Kind stets eine Orientierung an dem fachlichen und entwicklungspsychologischen Bezugsrahmen notwendig. D.h. Förderziele hängen letztlich auch wieder von einem normorientierten Bezugssystem ab, das Aufschluss darüber gibt, welches der „nächste Schritt“ wäre. Dies wird von vielen förderdiagnostischen Instrumenten auch berücksichtigt. In der Folge bleibt aber noch die Frage, wie das so diagnostizierte Ziel zu erreichen ist. Hier ist wiederum didaktische Kompetenz gefragt. Wirkliche förderdiagnostische Kompetenz umfasst also lern- und entwicklungspsychologische, sowie fachliche und fachdidaktische Kenntnisse. Bei den diagnostizierenden Pädagog/innen muss also Metawissen über Entwicklungsverläufe, Präventions- und Interventionskonzepte gefördert werden. Nur dann kann eine Aussage getroffen werden, die über eine reine Differenzaussage, nämlich wie weit das Kind hinter den anderen Kindern seiner Gruppe zurückliegt

oder an welcher Stelle es im Leistungsspektrum der Gruppe steht, hinausgeht. „Das Ziel muss bekannt sein, der Weg zum Ziel muss bekannt sein, erst dann kann beschrieben werden, wo ein Kind auf dem Weg zu diesem Ziel steht“ (Moser Opitz 2006, S.13).

In einem weiterentwickelten Begriff einer (pädagogischen) Diagnostik, die Ausgangspunkt für Förderung sein kann, ist daher darauf zu achten, dass diese sowohl theoriegeleitet ist, als auch dass fachliche, fachdidaktische sowie entwicklungspsychologische Aspekte in der Konstruktion und Anwendung der Instrumente eine Rolle spielen. Gütekriterium einer solchen Diagnostik ist vor allem Transparenz: Dies betrifft zum einen die getroffenen normorientierten Entscheidungen (z.B. welcher Kenntnisstand als altersangemessen betrachtet wird). Zum anderen sollte eine transparente Planung und Dokumentation eine intersubjektive Nachvollziehbarkeit bewirken, die eine möglichst objektive Beurteilung ermöglicht und für andere nachvollziehbar, wenn auch nicht immer reproduzierbar ist.

Wenn auch das Kind als ganze Person und die entsprechenden Umweltbedingungen in die diagnostischen Aussagen einbezogen werden sollten, ist es dennoch wichtig, die Datenerhebung auf die relevanten Bereiche zu konzentrieren, um hier ausreichend genaue Ergebnisse zu erhalten.

Für die vorschulischen Bereiche gilt, dass diejenigen Gebiete, die in besonders hohem Maße mit den späteren schulischen Leistungen in Verbindung stehen, von besonders großer Wichtigkeit sind. Diesbezügliche Erkenntnisse können inzwischen als gesichert gelten und es gibt vielfältige Verfahren und Aufgabensammlungen, mit denen diese überprüft werden können. An dieser Stelle ist jedoch darauf hinzuweisen, dass Diagnosen, die der Früherkennung von Rechenschwierigkeiten vor dem Schulalter dienen, ihre Möglichkeiten gewissermaßen verschenken, wenn sie sich auf die standardisierte Zuteilung zu einer Gruppe von Risikokindern beschränken, die über die Zugehörigkeit zum unteren Leistungsspektrum der Gesamt- oder Vergleichsgruppe definiert ist. Hilfreich ist es hingegen, wenn Pädagog/innen insbesondere auch im Arbeitsalltag, einen Blick für mögliche Schwierigkeiten und Rückstände entwickeln und in der Lage sind, diese derart zu erfassen, dass ausgleichende pädagogische Angebote darauf aufgebaut werden können. Auch an dieser Stelle zeigt sich wiederum die Notwendigkeit, im Bereich der Lern- und Entwicklungsprozesse ausreichend ausgebildet zu sein. Dabei geht es nicht darum mathematische „Nachhilfe“ bereits im Kindergarten zu organisieren, sondern allen Kindern die mathematischen Erfahrungen in selbstverständlicher und spielerischer Form zu ermöglichen und sie als solche bewusst zu machen. Zugleich sollte auch im Kindergartenalter eine scheinbar motivationsfördernde „unterhaltsamen“ Gestaltung die fundamentalen Ideen und Strukturen der Mathematik nicht überdecken, sondern es den Kindern ermöglichen, sich eben diesen anzunähern.

Mathematik im Kindergarten

Die Charakterisierung von Erfahrungen als „mathematische Erfahrungen“ erstreckt sich bis weit vor den Beginn der Schulzeit. Kinder machen Erfahrungen mit ihrem eigenen Körper und der Raum-Lage, mit Gegenständen und ihren Eigenschaften, mit geometrischen Formen, Mustern und Zahlen.

Mit zunehmender sprachlicher Kompetenz werden diese Erfahrungen reflektiert und analysiert. So können Raum-Lage-Beziehungen, einfache Formen und Körper benannt und ihre Eigenschaften und Unterschiede diskutiert werden. Ein grundlegender Teil der kognitiven Entwicklung ist das Vergleichen, Sortieren, Klassifizieren und Anordnen von Objekten und Materialien. Dies führt zu Erkenntnissen über Invarianz und im engeren mathematischen Sinne zur Erfassung von Anzahlen, zum Zusammenfassen und Aufteilen von Mengen usw.

Es geht dabei für den/die Pädagog/in nicht vorrangig um die Vermittlung von Wissen, sondern um die Unterstützung der kognitiven Entwicklung und des mathematischen Grundverständnisses. Dazu sind die sinnliche Erfahrung und zugleich die Bewusstmachung der Alltagsmathematik auf individuellen Wegen anzustreben. Mittlerweile liegen zahlreiche Materialien für die Anregung mathematischer Erfahrungen im Vorschulalter vor. Neben umfassenden Programmen wie dem „Zahlenland“, den

Veröffentlichungen des Projektes „Mathe 2000“ (kleines Formen-, Zahlen- und Denkspielebuch) oder den „Mathe-Kings“, gibt es zahlreiche Bücher, Themenhefte und Einzelartikel mit Praxisbeispielen, die als Grundlage für die praktische Arbeit dienen können (eine erste Auswahl findet sich in der Literaturliste am Ende dieses Handbuchs, zusammen mit Veröffentlichungen zur Förderung von Kindern im mathematischen Anfangsunterricht). Konkrete mathematische Erfahrungen im Kindergarten sind dabei unter anderem das Erkennen von Gegenstandsmerkmalen und darauf aufbauendes Sortieren, Ordnen und Klassifizieren, der Auseinandersetzung mit Anzahlen, Zählen und Ziffern, Vorgänge des Messens und Vergleichens sowie Erfahrungen mit geometrischen Mustern und Formen (vgl. u.a. Grassmann 2005; Grüßing et al. 2006).

Förderung von Kindern mit Lernschwierigkeiten

Mit dem Begriff der Förderung sollen in diesem Zusammenhang besondere Unterstützungsformen für Kinder bezeichnet werden, bei denen das pädagogische Standardangebot für eine angemessene Entwicklung nicht ausreicht. Damit wird auch deutlich, dass sich die Frage, ob ein Kind „besonderer Förderung“ bedarf und damit Lernschwierigkeiten im „normalen Unterricht“ hat, sich daran bemisst, was als „Standardangebot“ gilt, bzw. vorgehalten wird und was von einem Kind als angemessene Entwicklung erwartet wird.

Förderung kann innerhalb der Schule oder in außerschulischen Einrichtungen in Einzelarbeit oder in Kleingruppen erfolgen, aber auch eingebunden in den Unterricht als binnendifferenzierte Maßnahme. Zu unterscheiden ist außerdem Förderung, die sich im Sinne von Nachhilfe auf den aktuellen Schulstoff bezieht und solche, die auf Basis einer allgemeinen Diagnostik fehlende grundlegende Kompetenzen aufzubauen versucht. Deutlich ist dabei, dass auch Kinder mit Lernschwierigkeiten von offenen, problemorientierten Vorgehensweisen profitieren, wie es im Kontext des entdeckenden Lernens (u.a. Wittmann/Müller 1990; Müller 2000) im Mathematikunterricht entwickelt wurde. In diesem Sinne ist auch in der Förderung dem Aufbau konzeptionellen Wissens Vorrang vor dem Erlernen von bloßen Techniken – wie beispielsweise des schriftlichen Rechnens – zu geben (vgl. u.a. Scherer 1995).

Insbesondere beim Übergang von Kindergarten zu Grundschule wird deutlich, dass es sich bei „normaler Unterstützung“ und „zusätzlicher Förderung“ im Prinzip um die gleichen Inhalte und didaktischen Bestrebungen handelt, die nur zu unterschiedlichen Zeitpunkten und in unterschiedlichen Organisationsformen umgesetzt werden. Handelt es sich also um Abweichungen innerhalb des „normalen“ Entwicklungsspektrums, die im Unterricht aufgefangen werden sollten, oder ist von Rechenschwäche/Lernschwierigkeiten³ zu sprechen – und welche Form der Förderung erscheint dann angemessen? Eindeutig ist die juristische Begriffsbestimmung von „Rechenschwäche“ für die Beantragung von Geldern zur außerschulischen Förderung, die nach BSGB IX vom Jugendamt finanziert werden. Diese macht eine Zuordnung nach psychodiagnostisch orientierten, internationalen Klassifikationssystemen wie der ICD 10 notwendig und setzt eine standardisierte Diagnostik voraus, die eine Differenz zwischen den Schwierigkeiten im mathematischen Bereich zu den sonstigen Leistungen des Kindes in anderen Fächern, bzw. der allgemeinen Intelligenzleistung nachweist. Neben dieser Diskrepanzdefinition gibt es auch verschiedene andere Begriffsbestimmungen sowie Erklärungsansätze für Rechenschwäche/Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht. Mit dem Ziel förderrelevante Erkenntnisse zu erlangen würde beispielsweise eine Diagnose/Beschreibung eines Kindes eher auf die inhaltlichen Bereiche zielen, in denen die Hauptschwierigkeiten bestehen (s.o.). Erklärungen zur Entstehung von Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht basieren auf verschiedenen Theorien, die thematisieren, wie mathematische Entwicklung zu charakterisieren ist und welche Faktoren in dieser Entwicklung relevant sind.

³ Der Begriff „Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht“ ist m.E. treffender, da dieses Phänomen nur im schulischen Zusammenhang auffällig wird und sich durch die „mangelnde“ Aneignung des schulischen Wissens auszeichnet, die sich im Übrigen auch nicht nur auf die Rechenleistung bezieht. In der Folge werden aber beide Begriffe verwendet, da der Begriff der Rechenschwäche/Rechenschwierigkeiten in der Literatur sehr häufig synonym genutzt wird.

So werden innerhalb der Neuropsychologie Störungen umgrenzter neuropsychologischer Funktionen, wie solche der auditiven oder visuellen Wahrnehmung beschrieben. Ältere Ansätze, die Schwierigkeiten im mathematischen Bereich (oder auch im Bereich Lese-Rechtschreibschwäche) als Teilleistungsstörungen auf inhaltsunspezifische Dysfunktionen in den Entwicklungsbereichen beschreiben, gelten dabei als überholt. Aktuellere Erkenntnisse ermöglichen eine Subtypenbildung im Rahmen von Erkenntnissen zu Zahlverarbeitung und Zahlrepräsentation im Gehirn (vgl. u.a. von Aster 2005).

Aus kognitionspsychologischer Sicht wird die Entwicklung mathematischen Verstehens und der mathematischen Begriffsbildung vor dem Hintergrund von Informationsverarbeitungsprozessen betrachtet. Dabei wurde beispielsweise die Unterscheidung zwischen prozeduralem und konzeptionellem Wissen getroffen (vgl. ua. Baroody/Dowker 2003 und Stern 2005).

Die Entwicklungspsychologie betrachtet die Entwicklung mathematischer Kompetenzen und Fertigkeiten im Verlauf der kindlichen Entwicklung. Kindliche Strategien werden dabei als grundsätzlich sinnhaft auf Basis der vorhandenen Kompetenzen und Vorstellungen betrachtet. Zu nennen sind hier beispielsweise Piagets Entwicklungsstadien im Verlauf der Verinnerlichung der Welt und ihrer Regelmäßigkeiten, Aebli's vier Phasen vom Anschaulichen zum Abstrakten (1961, S.11f), ebenso wie die Entwicklung des Zählens und Zahlbegriffs. Aus Sicht der Mathematikdidaktik sind Analysen und Klassifikation der konkreten Fehler hilfreich, um die individuellen Schwierigkeiten zu erkennen. Nach Lorenz (2005) können mangelndes Sprach-/Textverständnis, Schwierigkeiten bei der Analyse von Anschauungsmaterial, falsche Assoziationen und Vorstellungen oder die Nichtberücksichtigung relevanter Bedingungen Fehlerquellen sein.

Auch die Betrachtung unterrichtlicher Faktoren als Erklärung für Lernschwierigkeiten hat eine große Bedeutung, indem beispielsweise untersucht wird, ob eine Nichtpassung der kindlichen Bedürfnisse zum unterrichtlichen Vorgehen vorliegt oder der Teufelskreislauf aus Frustration, negativen Erwartungen und Motivationsverlust aufgedeckt wird, in den Kinder geraten, die den schulischen Anforderungen nicht genügen.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass sich die Entstehung von Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht nicht (mono-)kausal erklären lässt, d.h. dass immer ein Geflecht von Ursachen zusammenwirkt. Dieser Tatsache tragen systemische Ansätze Rechnung, die auch in der aktuellen Sonderpädagogik favorisiert werden. Verschiedene Ursachenfelder werden betrachtet, unterschiedliche theoretische Hintergründe integriert und die Wechselwirkung verschiedener Faktoren in Hinblick sowohl auf das Individuum als auch auf das soziale und schulische Umfeld betrachtet.

Ein Problem, das sich bei den meisten Kindern mit Schwierigkeiten im Mathematikunterricht zeigt, ist das lange Verbleiben beim zählenden Rechnen, das oftmals erst mit dem Beginn des Rechnens im 100er Raum zu Tage tritt. Präventiv sollte daher – neben der Absicherung der Vorläuferfähigkeiten – also von Beginn an darauf geachtet werden, dass alle Kinder, z.B. durch den Einsatz von Arbeitsmitteln (wie dem Rechenrahmen oder dem Zwanzigerfeld), in der Entwicklung von Strategien unterstützt werden, die ihnen eine Ablösung vom zählenden Rechnen ermöglichen. Kinder, denen der dazu notwendige flexible Umgang mit Zahlen und Zahlbeziehungen nicht gelingt, sollten rechtzeitig entdeckt und begleitet werden, d.h. bevor sich die Schwierigkeiten manifestieren. Die Literatur zum mathematischen Anfangsunterricht bietet hierzu zahlreiche Hinweise.

Literatur zu Abschnitt B: Theoretische Einführung

- Aebli, Hans (1961): Grundformen des Lehrens. Ein Beitrag zur psychologischen Grundlegung der Unterrichtsmethode. Stuttgart: Klett.
- Aster, Michael von (2005): Wie kommen die Zahlen in den Kopf? Ein Modell der normalen und abweichenden Entwicklung zahlverarbeitender Hirnfunktionen. In: Aster, Michael von; Lorenz, Jens Holger (Hg.): Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht, S.13–33.
- Baroody, Arthur J.; Dowker, Ann (Hg.) (2003): The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptive expertise. Mahwah, NJ u.a.: Erlbaum.
- Bönig, Dagmar; Wollring, Bernd (2004): Wie Kellner rechnen. Routinierte Mathematik im Alltag. In: Krauthausen, Günter/Scherer, Petra (Hg.): Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik. Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung. Festschrift für Hartmut Spiegel. Donauwörth: Auer
- Brügelmann, Hans (1992): Geschlossene Gehirne und offener Unterricht. In: Die Grundschulzeitschrift, H. 54, S.2–3.
- Bruner, Jerome S. (1974): Entwurf einer Unterrichtstheorie. Berlin: Berlin-Verl..
- Faust-Siehl, Gabriele (Hg.) (2001): Schulanfang ohne Umwege. Mehr Flexibilität im Bildungswesen. Frankfurt am Main: Grundschulverband - Arbeitskreis Grundschule.
- Franke, Marianne (2000): Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Heidelberg: Spektrum.
- Frostig, Marianne (1972): Wahrnehmungstraining. Dortmund: Crüwell.
- Fuchs, Mandy (2002): "Zahlen sind unsere Freunde" - Anregungen zum Fördern mathematisch begabter Erstklässler. In: Grundschulunterricht, Jg. 49, H. 7+8, S.19–24.
- Fuson, Karen C. (1988): Children's counting and concepts of number. New York, Berlin: Springer.
- Gelman, Rochel; Gallistel, C. R. (1978): The child's understanding of number. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Pr.
- Grassmann, Marianne (2005): Im Kindergarten Mathematik unterrichten? In: Grundschule, Jg. 37, H. 1, S.20–23.
- Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.) (2006): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren]. Offenburg: Mildenerger.
- Hasemann, Klaus (2001): "Zähl' doch mal!" Die numerische Kompetenz von Schulanfängern. In: Sache, Wort, Zahl, Jg. 29, H. 35, S.53–58.
- Heide, Lili (2005): Flexible Strategien - beobachtet im letzten Kindergartenjahr. In: Grundschulunterricht, Jg. 52, H. 7-8, S.28–31.
- Kaufmann, Sabine (2003): Früherkennung von Rechenstörungen in der Eingangsklasse der Grundschule und darauf abgestimmte remediale Maßnahmen. Frankfurt am Main: Lang.
- Krajewski, Kristin (2003): Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Kovac.
- Lorenz, Jens H. (2005): Warum ist Geometrie so wichtig? In: Lorenz, Jens Holger; Radatz, Hendrik (Hg.): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel, S.104–113.
- Lurija, Aleksandr R. (1992): Das Gehirn in Aktion. Einführung in die Neuropsychologie. Reinbek: Rowohlt.
- Moser Opitz, Elisabeth (2006): Förderdiagnostik: Entstehung – Ziele – Leitlinien – Beispiele. In: Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren]. Offenburg: Mildenerger, S.10–28.
- Müller, Gerhard N. (2000): Mit Kindern rechnen. Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.
- Munoz, Venor (2006): Report of the Special Rapporteur on the right to education, Vernor Muñoz. Mission to Germany. UN (Hrsg). www.ohchr.org/english/bodies/hrcouncil/docs/4session/A.HRC.4.29.Add.3.pdf , letzter Zugriff: 15.11.07
- Piaget, Jean; Szeminska, Alina (1975): Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Stuttgart: Klett.
- Resnick, L.B. (1989): Developing mathematical knowledge. In: American Psychologist, 44, S.162–169.
- Scherer, Petra (1995): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung. Heidelberg: Winter
- Stern, Elisabeth (2003): Früh übt sich-Neuere Ergebnisse aus der LOGIK-Studie zum Lösen mathematischer Textaufgaben. In: Fritz, Annemarie; Ricken, Gabi; Schmidt, Siegbert (Hg.): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch. Weinheim: Beltz, S.116–131.
- Stern, Elisabeth (2005): Kognitive Entwicklungspsychologie des mathematischen Denkens. In: Aster, Michael von; Lorenz, Jens Holger (Hg.): Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht, S.137–149.
- Weißhaupt, Steffi; Peucker, Sabine; Wirtz, Markus (2006): Diagnose mathematischen Vorwissens im Vorschulalter und Vorhersage von Rechenleistungen und Rechenschwierigkeiten in der Grundschule. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht, Jg. 53, H. 4, S.236–245.
- Wember, F. (2003): Die Entwicklung des Zahlbegriffs aus psychologischer Sicht. In: Fritz, Annemarie; Ricken, Gabi; Schmidt, Siegbert (Hg.): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch. Weinheim: Beltz, S.48–64.

C Themen der Modulveranstaltung

Vorläuferfähigkeiten und Schulbeginn

Der Erwerb mathematischen Wissens beginnt weit vor dem ersten Mathematikunterricht. Verschiedene Studien haben belegt, dass viele Schulanfänger/innen umfassende mathematische Kompetenzen, insbesondere in Form informeller Rechenstrategien, zeigen. Diese Vorkenntnisse werden von Lehrer/innen häufig unterschätzt und gehen bereits über den Stoff des ersten Schuljahres hinaus. Zugleich zeigt sich in allen Studien eine enorme Bandbreite an mathematischen Kompetenzen und es wird deutlich, dass eine erschreckend große Zahl von Kindern massive Schwierigkeiten in den grundlegenden Bereichen hat, die für den Beginn der schulmathematischen Entwicklung vorausgesetzt werden. Diese mathematischen Vorläuferfähigkeiten erweisen sich in der Folge als zentraler Faktor in Bezug auf die Entwicklung der schulischen Leistungen, d.h. die Leistungsunterschiede zu Schulbeginn bleiben über die Schuljahre relativ stabil oder werden sogar noch verstärkt.

Die Schwierigkeiten im Mathematikunterricht der ersten Jahre bestehen dann überwiegend in den Bereichen, die von den leistungsstärkeren Kindern bereits im Vorschulalter bewältigt werden, wie z.B. dem flexiblen Umgang mit Zahlen. Aus dieser Konstellation ergibt sich sowohl eine hohe Relevanz der Förderung dieser Vorläuferfähigkeiten im Elementarbereich als auch die Konzentration auf genau diese Basisfertigkeiten in der Förderung für Schüler/innen mit Lernschwierigkeiten in den ersten Schuljahren.

Von den verschiedensten Bereichen mathematischer Entwicklung im Vorschulalter ist dabei besonderes Augenmerk auf die konkreten Vorläuferfähigkeiten, insbesondere für die spätere arithmetische Kompetenz, zu richten.

Zentrale Themen

- Studien zu mathematischen Kompetenzen von Schulanfänger/innen (überwiegend unterschätzte Kompetenzen, große Bandbreite der Kompetenzen und ein großer Teil der Kinder, denen selbst Basiskompetenzen fehlen)
- Stabilität der Leistungsunterschiede über die ersten Schuljahre hinweg
- Relevanz vorschulischer mathematischer Entwicklung/Förderung

Lernziele

Ausgehend von der Überlegung, welche Kenntnisse und Fertigkeiten Kinder zu Schulbeginn bereits zeigen und welche Rolle diese Vorkenntnisse für den weiteren schulischen Wissenserwerb haben, sollen sich die Studierenden mit der Frage auseinandersetzen, warum mathematisches Lernen schon vor dem Schuleintritt ein wichtiges Thema ist und welche inhaltlichen Bereiche in diesem Zusammenhang besonders relevant erscheinen.

Vor diesem Hintergrund erschließt sich auch die Auswahl und Gewichtung der Inhaltsbereiche im Seminar. In einer der späteren Sitzungen kann die Frage „Wozu und welche Mathematik vor der Schule?“ mit einem stärkeren Schwerpunkt auf der Abgrenzung von Schul- und Vorschulmathematik wieder aufgegriffen werden.

Hinweise zum Vorgehen/Arbeitsaufträge

Eine offene Diskussion zur Frage, ob und warum mathematische Inhalte im Elementarbereich von Bedeutung sind, kann als Einstieg am Beginn der Sitzung genutzt werden. Den Studierenden werden dann Aufgaben aus einer oder verschiedenen Studie(n) zu Vorkenntnissen von Schulanfänger/innen vorgelegt. Sie sollten dann vermuten und diskutieren, zu welchem Anteil Kinder diese Aufgaben bewältigen konnten. Die Vermutungen der Studierenden können dann mit den Einschätzungen der Lehrer/innen und mit den tatsächlichen Ergebnissen der Erhebungen verglichen und abschließend die Implikationen der Ergebnisse diskutiert werden. An dieser Stelle sollten auch die Erkenntnisse zur Prognosefähigkeit der Kompetenzen zu Schulbeginn für die schulmathematische Entwicklung angeführt werden.

Literatur zum Veranstaltungsthema „Vorläuferfähigkeiten und Schulbeginn“

- Caluori, Franco (2004): Die numerische Kompetenz von Vorschulkindern. Theoretische Modelle und empirische Befunde. Hamburg: Kovac
- Grassmann, Marianne (2002): Mathematische Kompetenzen von Schulanfängern. Potsdam: Universitätsverl.
- Grassmann, Marianne; Mirwald, Elke (1997): Hohe mathematische Kompetenzen von Schulanfängern - Was nun? Plädoyer für einen veränderten Schulanfang im Lernbereich Mathematik. In: Grundschulunterricht, Jg. 44, H. 5, S.33-35.
- Grassmann, Marianne; Mirwald, Elke; Klunter, Martina; Veith, Ute (1995): Arithmetische Kompetenz von Schulanfängern - Schlußfolgerungen für die Gestaltung des Anfangsunterrichtes. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, Jg. 23, H. 7, S.302-303, 314-321.
- Hasemann, Klaus (2001): "Zähl' doch mal!" Die numerische Kompetenz von Schulanfängern. In: Sache, Wort, Zahl, Jg. 29, H. 35, S.53-58.
- Heide, Lili (2005): Flexible Strategien - beobachtet im letzten Kindergartenjahr. In: Grundschulunterricht, Jg. 52, H. 7-8, S.28-31.
- Krajewski, Kristin; Schneider, Wolfgang (2006): Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht, Jg. 53, H. 4, S.246-262.
- Schipper, Wilhelm (1996): Kompetenz und Heterogenität im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Die Grundschulzeitschrift, Jg. 10, H. 96, S.11-15.
- Selter, Christoph (1995): Zur Fiktivität der "Stunde Null" im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Mathematische Unterrichtspraxis, Jg. 16, H. 2, S.11-10.

Vorläuferfähigkeiten I: Zahlbegriffsentwicklung

Die kindliche Sichtweise auf Zahlen und Theorien zur Zahlbegriffsentwicklung

Der Erwerb der Zahlwortreihe beginnt im Alter von zwei Jahren. Bereits bei Säuglingen konnte ein Verständnis für die Unterscheidung von Mengen mit bis zu drei Elementen nachgewiesen werden. Bis zu einem wirklichen Verständnis von Mengen und ihren Veränderungen ist es aber noch ein weiter Weg und die Zahlen sind zunächst nicht viel mehr als ein „sinnloses“ Gedicht. Untersuchungen zu Zahlauffassungen von Kindern zeigen, dass individuelle Zahlvorstellungen (etwa bzgl. Anordnung, Bedeutung usw.) bei der Hälfte der Kinder bis zum vierten Schuljahr stabil bleiben, bzw. mit den „schulmathematischen“ Vorstellungen „kämpfen“. Kinder zählen zu Beginn selten um eine Anzahl zu erfassen, sondern z.B. um dem „Wunsch“ ihrer Eltern zu entsprechen etc. Der Zweck des Zählens ist aber bedeutsam für die Zahlauffassung und den Zahlbegriff.

Im Gegensatz zur klassischen Auffassung Piagets ist der Umgang mit der Zahlwortreihe jedoch ein wichtiger Aspekt in der Entwicklung des Zahlbegriffs, auch wenn das erste kindliche Zählen noch wenig mit dem zu tun hat, was als Zahlverständnis die Grundlage für die (Schul-)Mathematik bildet.

Um einen umfassenden Zahlbegriff zu entwickeln, müssen Kinder Erfahrungen mit Zahlen und Zählen sammeln, wodurch der Gebrauch der Zahlwortreihe zunehmend flexibler und mit dem Wissen um Mengen und Mengenveränderungen verknüpft wird.

Zentrale Themen

- Die kindliche Sichtweise auf Zahlen und Zählen
 - *Subitizing*
 - Zahlauffassungen von Kindern
 - Vorstellung vom Zweck des Zählens
- Zahlbegriffsentwicklung
 - Erwerb der Zahlwortreihe
 - Elemente zählen
 - Invarianz, Seriation, Klassifikation
 - Mengenverständnis/Protoquantitative Schemata

Lernziele

Die Studierenden sollen nachvollziehen, in welchen Schritten Kinder einen Begriff davon entwickeln, was eine Zahl ist und wie es ihnen gelingt, Zahlen in Beziehung zur Welt und zu anderen Zahlen zu setzen. Anhand der Frage, welche Kenntnisse bereits Säuglinge und Kleinkinder haben und welche Vorstellungen sich Kinder von Zahlen machen, soll erarbeitet werden, zu welchen Erkenntnissen Kinder kommen müssen, um zu einem im mathematischen Sinne kompetenten Umgang mit Zahlen zu gelangen.

Dies dient auch dazu sich über die verschiedenen – uns als Erwachsenen oft gar nicht bewussten – Aspekte des Zahlbegriffs und der Funktion des Zählens bewusst zu machen.

Auf Basis des Wissens um die Entwicklung des Zahlbegriffs sollen dann gemeinsam diagnostische Möglichkeiten im Bereich des Zählens entwickelt werden.

Die möglichen Diagnoseaufgaben in diesem Bereich sind relativ begrenzt und wenig komplex (die Diagnose erfolgt vorrangig anhand des „Zählens“ der Kinder), daher bietet sich die Möglichkeit an, detailliert über die konkrete Gestaltung einer Interview- oder Beobachtungssituation zu sprechen, beispielsweise ob man den Kindern eine Startzahl vorgibt oder nicht, wie genau man die Formulierung wählt, um Kinder zum „Zählen in Schritten“ aufzufordern, usw.

Hinweise zum Vorgehen/Arbeitsaufträge

In der Auseinandersetzung über die Fragen „Wozu dienen Zahlen?“, „Warum zählt man?“, „Warum zählen Kinder?“ kann über unterschiedliche Funktionen des Zählens und verschiedene Aspekte des Zahlbegriffs diskutiert werden. Als Anregung und/oder Kontrast können Kinderprodukte zu Zahlvorstellungen (Käpnick 2004) und Aussagen von Kindern zum Zweck ihres Zählens (Munn 2001), sowie Beispiele zu „Zählfehlern“ (Baroody, Wilkins 2004) dienen, die den Studierenden ermöglichen zu analysieren, welche Kenntnisse und Einsichten den „Zählanfängern“ fehlen. Die so gewonnenen Vermutungen werden vor dem Hintergrund der Theorien zur Entwicklung der Zahlwortreihe (Fuson 1988) und Zählprinzipien (Gelman 1978) und dem Konzept der protoquantitativen Schemata (Resnick 1989) systematisiert. Nachbereitende Lektüre (z.B. Wember 2003 oder Moser Opitz 2007, S.81ff) vertieft die neuen Begrifflichkeiten und bietet in Ergänzung zu den zählbasierten Ansätzen einen Einblick in die Theorien Piagets und ihre kritischen Aspekte. In anschließenden Übungen (s.u.) können die Erkenntnisse diskutiert und verfestigt werden. Die gemeinsame Konstruktion eines diagnostischen Interviews zum klar eingegrenzten Bereich „Zählen“ schließt das Thema ab. Dabei sollte die genaue Abfolge und der Wortlaut der Aufgabenstellungen festgehalten und diskutiert werden.

Literatur zum Veranstaltungsthema „Zahlbegriffsentwicklung“

- Baroody, Arthur J.; Wilkins, J. L. M. (2004): The development of informal counting, number, and arithmetic skills and concepts. In: Copley, Juanita V. (Hg.): Mathematics in the early years. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, S.48–65.
- Fuson, Karen C. (1988): Children's counting and concepts of number. New York, Berlin: Springer.
- Gelman, Rochel; Gallistel, C. R. (1978): The child's understanding of number. Cambridge.: Harvard Univ. Pr.
- Grüßing, Meike; May, Margarete; Peter-Koop, Andrea (2007): Von diagnostischen Befunden zu Förderkonzepten. Mathematische Frühförderung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule. In: Sache, Wort, Zahl, Jg. 35, H. 83, S.50–55.
- Käpnick, Friedhelm (2004): "Aber große Zahlen sind stark... Subjektive Zahlauffassungen von Kindern. In: Sache, Wort, Zahl, Jg. 32, H. 60, S.12–18.
- Krajewski, Kristin (2005): Vorschulische Mengenbewusstheit von Zahlen und ihre Bedeutung für die Früherkennung von Rechenschwäche. In: Hasselhorn, Marcus (Hg.): Diagnostik von Mathematikleistungen. Göttingen.: Hogrefe, S.49–70.
- Moser Opitz, Elisabeth (2001): Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen. Bern: Haupt.
- Moser Opitz, Elisabeth (2007): Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern: Haupt.
- Munn, Penny (2001): Childrens beliefs about counting. In: Thompson, Frederick Ian (Hg.): Teaching and learning early number. Buckingham: Open Univ. Press.
- Resnick, L.B. (1989): Developing mathematical knowledge. In: American Psychologist, 44, S.162–169.
- Wember, F. (2003): Die Entwicklung des Zahlbegriffs aus psychologischer Sicht. In: Fritz, Annemarie; Ricken, Gabi; Schmidt, Siegbert (Hg.): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch. Weinheim: Beltz, S.48–64.

Materialien (s. Anlagen)

Aufgaben zu Zahlbegriffs- und Zählentwicklung

Grundlagen von Rechenprozessen

Erstes Rechnen – Zählendes Rechnen & Zahlzusammenhänge, Operationsverständnis

Ein Hauptmerkmal von Kindern mit Schwierigkeiten im Mathematikunterricht ist ihr langer Verbleib bei der Strategie des zählenden Rechnens.

Ausgehend von flexiblen und sicheren Zählfähigkeiten und dem Wissen um Veränderungen von Mengen entwickelt sich vom Auszählen aller Elemente einer zusammengefügt Menge bis hin zum elaborierten Weiterzählen in Schritten als erste Rechenstrategie das zählende Rechnen, das viele Vorteile bietet: Es ist unmittelbar einleuchtend, für jede Aufgabe nach dem gleichen Muster anwendbar und vermittelt damit eine hohe Sicherheit. Der Verbleib beim zählenden Rechnen überfordert bei höheren Zahlen aber Arbeitsgedächtnis, Merk- und Konzentrationsfähigkeit der Schüler, was zu einer hohen Fehleranfälligkeit führt und die Strategie ab dem 100er Raum kaum noch anwendbar macht.

Um das zählende Rechnen zu überwinden, ist es notwendig, dass Kinder – beginnend mit der strukturierten Anzahlerfassung – Einsicht in Zahlbeziehungen erlangen und sich nach und nach verschiedene operative Kopfrechenstrategien, wie das Ableiten von Ergebnisse aus bereits bekannten Ergebnissen, aneignen (z.B. $5+5=10$, also $5+6=10+1=11$).

Als Grundlagen von Rechenprozessen ist das Zusammenführen von Mengen- und Zahlwissen, die Fähigkeit zur strukturierten Anzahlerfassung, sowie das Operationsverständnis zu sehen.

Das Operationsverständnis – die inhaltliche Vorstellung von Handlungen, die beispielsweise hinter dem Vorgang der Addition stehen – entwickelt sich von der enaktiven über die ikonische zur symbolischen Ebene. In allen verschiedenen Repräsentationsformen lösen Kinder Probleme, die späteren Rechenaufgaben entsprechen. Es ist von zentraler Bedeutung, dass ihnen dabei im Laufe der zunehmenden Abstraktion, die hinter den Operationen stehenden Handlungen, bewusst sind und ein flexibler Wechsel zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen auch nach dem Erreichen der symbolischen Ebene nicht vernachlässigt wird.

Wichtig ist also nicht die Beachtung einer bestimmten Stufenfolge, sondern vielmehr der Prozess, der durch Reflexion über Handlung und anschauliche Wahrnehmung zu einer Vorstellung führt, die nicht auf anschauliche Hilfen angewiesen ist, aber dennoch verfügbar bleibt.

Zentrale Inhalte

- Vorteile des zählenden Rechnens, damit verbundene Kompetenzen
- Probleme des zählenden Rechnens; zählendes Rechnen ist ein Hauptmerkmal von „rechen-schwachen“ Kindern.
- Teilfertigkeiten, um zählendes Rechnen zu überwinden
- Operative Strategien
- Operationsverständnis

Lernziele

Im Gesamtablauf des Seminars erfolgt an dieser Stelle bewusst ein Vorgriff auf (bereits erworbene) Rechenkompetenz und mögliche Schwierigkeiten. Den Studierenden soll die Bedeutung des zählenden Rechnens sowohl als wertvolle erste Rechenstrategie als auch als Hauptmerkmal von Schwierigkeiten im Mathematikunterricht zu einem späteren Zeitpunkt verdeutlicht werden.

Vor diesem Hintergrund sollen sich die Studierenden erschließen, welche Teilkompetenzen für die angestrebte Entwicklung zum „kompetenten Rechner“ von Bedeutung sind, welche Rolle sie in dieser Entwicklung spielen und wie ihre Entfaltung überprüft werden kann.

Indem die Frage „Warum rechnen Kinder zählend?“ an den Anfang der Auseinandersetzung mit dem Thema gestellt wird, eröffnet sich die Perspektive auf zählendes Rechnen als Kompetenz und damit auch eine Reflexion eines defizitorientierten Blickes (so werden auf diese Frage vermutlich einige Studierende zunächst mit der Schilderung mangelnder Kompetenzen bezüglich des „richtigen“ Rechnens antworten). In der gemeinsamen Diskussion sollte deutlich werden, dass zählendes Rechnen zwar als ein Hauptmerkmal von Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht gilt und spätestens im 100er Raum zu größeren Problemen führt, aber zunächst einmal eine angemessene Lösungsstrategie darstellt, die diverse Kompetenzen voraussetzt und verschiedene Vorteile hat. Auf dieser Basis können dann die Fertigkeiten thematisiert werden, die dem zählenden Rechnen zugrunde liegen, ebenso wie diejenigen, die zu dessen Überwindung erforderlich sind.

Hinweise zum Vorgehen/Arbeitsaufträge

Wenn möglich, sollten die Studierenden sich der grundlegenden Frage, was einen kompetenten Rechner auszeichnet, vor der Sitzung anhand von zwei Fallbeispielen annähern.

Aufgabe: „kompetenter Rechner“

Suchen Sie sich zwei Kinder (ca. Mitte 1. Klasse bis Mitte 2. Klasse), einen „guten“ und einen „schlechten“ Rechner! Stellen Sie Ihnen zwei/drei Rechenaufgaben und versuchen Sie herauszubekommen wie die Kinder die Aufgaben lösen!

Was unterscheidet die beiden Kinder?

Es genügt dabei, wenn in den späteren Kleingruppen jeweils ein oder zwei Studierende von ihrer Erfahrung berichten können. Ergänzend oder alternativ können hier auch schriftliche Fallbeispiele als Grundlage der Diskussion genutzt werden (s. Anlage).

Zunächst kann in der Gesamtgruppe dann die Frage diskutiert werden: „Warum rechnen Kinder zählend?“ (Vorteile, zugrunde liegende Kompetenzen, Schwierigkeiten).

Aufgabe: „zählendes Rechnen“

Kinder mit guten Leistungen in Mathematik lösen Aufgaben im Zahlraum bis 20 im Alter von acht Jahren durch Ableiten oder Auswendiglernen, während Kinder mit unterdurchschnittlichen Leistungen die Aufgaben zählend lösen.

Warum rechnen Kinder zählend?

Um einen stärker kompetenzorientierten Blick anzuregen, kann die Frage im Laufe der Diskussion ergänzt werden: Was muss man können, um zählend zu rechnen? Welche Vorteile hat das zählende Rechnen?

In Kleingruppen sollte dann – u.a. auf Basis der konkreten Fallbeispiele – der Frage nachgegangen werden, was einen kompetenten Rechner auszeichnet und was zur Ablösung vom zählenden Rechnen notwendig erscheint.

Abschließend können die Studierenden anhand von Videomaterial, wenn vorhanden, zur strukturierten Anzahlerfassung und dem flexiblen Umgang mit Zahlen und Zahlzerlegungen einen Einblick in unterschiedliche Herangehensweisen und Lösungen zu solchen Aufgaben erhalten.

Das Operationsverständnis kann entweder abschließend oder zu Beginn als weiterer wichtiger Faktor in der Entwicklung zum kompetenten Rechner thematisiert werden.

Nachdem die verschiedenen Ebenen vorgestellt wurden, sollen die Studierenden selbst Aufgaben entwerfen, die Kenntnisse in diesem Bereich überprüfen.

Aufgabe: Operationsverständnis

Welche Aufgaben würden Sie nutzen, um das Operationsverständnis zu überprüfen?

Die verschiedenen konkreten Vorschläge können dann systematisiert werden. Bei verschiedenen bildlichen oder erzählenden Darstellungsformen für formale Aufgaben ist zu beachten, dass ein Bild oder ein Text niemals nur auf eine einzige formale Aufgabe hinausläuft, sondern darin stets unterschiedliche Aufgaben „gesehen“ werden können (vgl. dazu u.a. Krauthausen, Scherer 2007, S.83).

Literatur zum Veranstaltungsthema „Grundlagen von Rechenprozessen“

- Gerster, Hans-Dieter (1996): Vom Fingerrechnen zum Kopfrechnen- methodische Schritte aus der Sackgasse des zählenden Rechnens. In: Eberle, Gerhard; Kornmann, Reimer (Hg.): Lernschwierigkeiten und Vermittlungsprobleme im Mathematikunterricht an Grund- und Sonderschulen. Möglichkeiten der Vermeidung und Überwindung. Weinheim: Dt. Studien-Verl.
- Gerster, Hans-Dieter (2000): Wege zum nicht-zählenden Rechnen. In: Grundschulunterricht, Jg. 47, H. 7-8, S.33-35.
- Krauthausen, Günter; Scherer, Petra (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik. München: Elsevier.
- Schipper, W. (2004): Von Handlungen zu Operationen: Entwicklung von Strategien des Kopfrechnens aus Handlungen an Materialien. In: Ganser, Bernd (Hg.): Rechenstörungen. Hilfen für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen der Mathematik. Donauwörth: Auer, S.191-203.

Vorläuferfähigkeiten II: Geometrie

Visuelle Wahrnehmung

Beginnend mit der Wahrnehmung des eigenen Körpers, seiner Position im Raum und der Auseinandersetzung mit verschiedenen Gegenständen machen Kinder in ihrer Entwicklung zahlreiche Erfahrungen, die als geometrisch bezeichnet werden können.

Eine besondere Rolle bezogen auf die spätere Schulmathematik spielt die Entwicklung der visuellen Wahrnehmung. Sie bildet neben ihrer grundlegenden Funktion für die kognitive Entwicklung allgemein die Basis für ein Verständnis arithmetischer Prozesse, da dem Umgang mit Zahlen und Rechenoperationen Vorstellungsbilder von Zahlen und ihren Beziehungen zueinander zugrunde liegen.

Auch wenn sie nicht (mehr) als isolierte Ursachen gelten können, ist die Bedeutung der visuellen Wahrnehmung als wichtige Vorläuferfähigkeiten und für die Prävention von Rechenschwierigkeiten unumstritten. Komponenten der visuellen Wahrnehmung werden daher in den meisten Diagnoseinstrumenten abgefragt und sollten auch bei informellen Verfahren Beachtung finden. Förderung in diesem Bereich sollte allerdings nicht isoliert erfolgen, sondern stets in mathematisch-geometrische Inhalte eingebunden werden.

Zentrale Inhalte

- Geometrische Aktivitäten und Erkenntnisse im Alltag der Kinder
- Komponenten der visuellen Wahrnehmung

Lernziele

Ausgehend von einer Sammlung verschiedener geometrischer Erfahrungen im Vorschulalter soll die besondere Bedeutung der visuellen Wahrnehmung als Vorläuferfähigkeit herausgearbeitet und ihre Komponenten erarbeitet werden.

Dabei sollte auch deutlich werden, dass es sich nicht um eine reine „Sinneswahrnehmung“ handelt, sondern die Wahrnehmungsleistung in enger Verbindung mit den vorhandenen Vorstellungen von der Welt und damit kognitiven Schemata zusammenhängt.

Das Verständnis der einzelnen Komponenten und ihrer Abgrenzung zueinander wird von den Studierenden anhand der Entwicklung konkreter Diagnostikaufgaben diskutiert.

Hinweise zum Vorgehen/Arbeitsaufträge

Zu Beginn können die verschiedenen Aspekte geometrischer Entwicklung im Vorschulalter gesammelt und in ihrer Bedeutung diskutiert werden.

Zum besseren Verständnis der Entwicklung der kindlichen Weltwahrnehmung kann die folgende Aufgabe zu Experimenten zwecks der Erfassung der kindlichen Entdeckung der Horizontalen (vgl. Hasemann 2004, S.71) dienen.

Aufgabe: Entwicklung der kindlichen Wahrnehmung/Vorstellung

Ein Kind erhält folgendes Arbeitsblatt mit der Aufgabe, die erste Flasche oben links so auszumalen, wie es in einer realen Modellflasche mit rotem Saft zu sehen ist.



Nun wird dem Kind erklärt, dass die Flasche mit fest verschlossenem Deckel gedreht wird und dann „auf der Seite liegt“, „auf dem Kopf steht“ usw. Die Modellflasche wird nicht gedreht und das Kind wird gebeten die Flüssigkeit in die Flaschen mit der veränderten Lage einzuzichnen. Die Studierenden sollen zunächst kurz eigene Lösungen einzeichnen und dann vermutete Kinderlösungen (für Kinder im Vorschulalter). Hasemann (2004, S.71) liefert zu den folgenden Beispielen von Kinderlösungen jeweils kurze Erläuterungen bezüglich des entwicklungspsychologischen Hintergrundes.

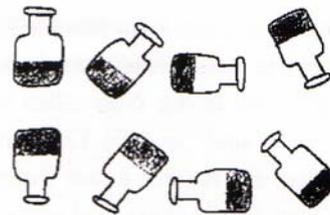


Abb. 4: GUN, 3 Jahre, 9 Monate

Abb. 5: JAU, 4 Jahre, 8 Monate

Abb. 6: RAB, 7 Jahre, 5 Monate; diese vier Bilder beschreiben die zeichnerische Abfolge bei der Darstellung des Flüssigkeitsstandes. Das rechte Bild gibt – laut RAB – den Stand korrekt wieder.

Quelle: Hasemann 2004, S.71

Als Ergänzung könnte die Diskussion von Items der Kategorie „visuelle Wahrnehmung“ aus Entwicklungstest für Kleinkinder das Bewusstsein dafür schärfen, dass es bei Wahrnehmungsprozessen nicht vorrangig um Sinneseindrücke, sondern um deren Verarbeitung und Interpretation geht. Den Studierenden können entsprechende Testitems aus dem Bereich visuelle Wahrnehmung, auditive Wahrnehmung und Kognition vorgelegt werden, um sie anschließend zu bitten, die in der Bewältigung der Aufgabe ausgedrückten Kompetenzen zu benennen.

Im Hauptteil der Sitzung sollten die Komponenten der visuellen Wahrnehmung betrachtet werden. Die Studierenden erarbeiten sich die Kategorien anhand von Texten (z.B. Kaufmann 2003).

Aufgabe: visuelle Wahrnehmung

Entwickeln Sie zu zweit zu einem Bereich der visuellen Wahrnehmung eine Diagnostikaufgabe und zeichnen/beschreiben Sie diese auf einer Karteikarte! Die Aufgabe sollte möglichst isoliert einen Bereich erfassen, den sie auf der Rückseite der Karteikarte benennen.

Tauschen Sie Ihre Karten mit einer anderen Gruppe und versuchen Sie herauszubekommen, welchen Bereich diese Gruppe mit ihren Aufgaben überprüfen wollte!

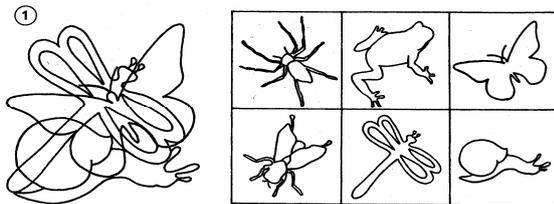
Alternativ/ergänzend kann folgende Fragestellung bearbeitet werden:

Aufgabe: Analyse Diagnoseaufgaben (vgl. Lorenz 2003)

Analysieren Sie folgende Aufgaben! Inwiefern sind diese geeignet, bereits zu Schulbeginn „Risikokinder“ ausfindig zu machen?

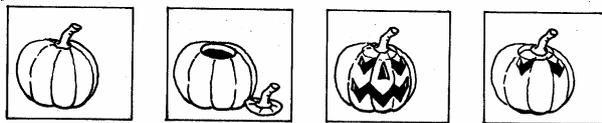
a)

Auf diesem Bild (links) verstecken sich drei Tiere. Sieh Dir das Bild genau an und sage mir, wer sich hier versteckt hat! Zeige mir die Tiere in diesen Kästchen neben dem Bild!



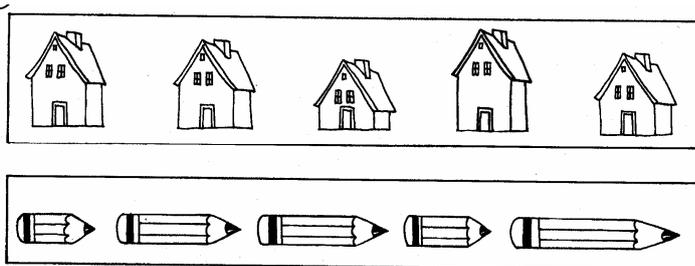
b)

Die Bilder erzählen eine Geschichte. Ein Kind hat einen Kürbissegeist gemacht. Aber leider hat jemand die Bilder durcheinander gebracht. Kannst Du mir sagen, wo die Geschichte anfängt? Und kannst Du mir den Schluss zeigen?



c)

Ordnen von Gegenständen nach der Größe, wie z.B. in folgenden Bildern:



Literatur zum Veranstaltungsthema „Geometrie“

Hasemann, Klaus (2004): Mathematische Erfahrungen und Aktivitäten in der Vorschulzeit.

In: Grundschulunterricht, Jg. 51, H. 7-8, S.15-20.

Kaufmann, Sabine (2003): Defizitäre visuelle Fähigkeiten: Risikofaktoren beim Rechnenlernen? Ergebnisse einer Untersuchung. In: Grundschule, Jg. 35, H. 4, S.14-16.

Lorenz, Jens Holger (2003): Aufgaben zur Eingangs- und unterrichtsbegleitenden Diagnostik. Früherkennung von Rechenstörungen in Klasse 1 und 2. In: Praxis Grundschule, Jg. 26, H. 3, S.18-26.

Diagnostik

Diagnoseformen und ihre Merkmale

Standardisierte Testverfahren setzen nicht zuletzt aufgrund der Testgütekriterien eine objektive Distanznahme voraus, die im Rahmen pädagogischer Situationen oft nur schwer herstellbar ist. Zugleich ist kritisch zu hinterfragen, wie aussagekräftig die in solchen Tests erreichten Ergebnisse für die weitere Planung pädagogischer Angebote sind, da beispielsweise der Fokus eher auf richtigen oder falschen Ergebnissen liegt und nur selten Lösungsstrategien festgehalten werden. Pädagogische Arbeit muss jedoch an den momentanen Vorgehensweisen der Kinder ansetzen, um ihnen ggf. den Weg zu erfolgreicheren Strategien ermöglichen zu können. Die Aufgabenformate standardisierter Verfahren können aber als Anregung auch für informelle, auf pädagogische Interventionen zielende Überprüfungen des Lernstandes dienen und die in ihnen festgehaltenen durchschnittlichen Leistungen bestimmter Alters-/Zielgruppen die Einordnung von Lern- bzw. Entwicklungsständen unterstützen.

Eine für pädagogische Interventionen wirklich hilfreiche Diagnostik muss sich aber von der rein quantitativen Erfassung des Leistungsstandes, mit dem Ziel etwaige Diskrepanzen zur Alters- oder Klassennorm festzustellen, lösen und sich mit den konkreten Kenntnissen der Schüler vor dem Hintergrund lern- und entwicklungspsychologischer, sowie fachlicher und fachdidaktischer Theorie auseinandersetzen. Zugleich müssen informelle Verfahren/Beobachtungen sensibel mit der Frage der Objektivität und Vergleichbarkeit umgehen. Insbesondere ist es nicht zulässig, informell gewonnene Erkenntnisse in einen normierten Entwicklungsstand zu übertragen. Jede Beobachtung ist durch den/die Beobachter/in gefiltert, der/die seine/ihre Aufmerksamkeit auf bestimmte Aspekte lenkt, sowie durch Erwartungen, die an die Situation und die beobachtete Person gebunden sind. Es ist zum Zwecke der Nachvollziehbarkeit notwendig, den eigenen Beobachtungsfokus zu thematisieren und zu reflektieren. Nützlich können hier z.B. im Vorhinein auf Basis der (Entwicklungs-) Theorie erstellte Kategorien sein. Zugleich sollte man versuchen nicht den Blick für das zu verlieren, was Kinder vielleicht unerwartet tun.

Zentrale Inhalte:

- Zielsetzung, Inhalte und Anwendung unterschiedlicher Diagnoseverfahren
- Merkmale und Ziele standardisierter Diagnostik
- Kriterien für Förderdiagnostik/pädagogische Diagnostik
- Vorteile und Schwierigkeiten informeller Verfahren/Beobachtungen

Lernziele

Vor dem Hintergrund der Analyse konkreter diagnostischer Verfahren sollen die Studierenden ein Bild davon entwickeln, welche verschiedenen Arten von Diagnostik es gibt und welche Zielsetzungen damit verbunden sind. Insbesondere sollen Merkmale, Vorteile und Probleme von standardisierten und informellen Diagnoseverfahren erarbeitet werden. Im Bereich der standardisierten Testverfahren ist zwar keine vertiefte Kenntnis der Gütekriterien und Konstruktionsmerkmale notwendig, es sollte jedoch die Möglichkeit geboten zu werden, sich anhand eines konkreten Testes mit den Prinzipien standardisierter Tests vertraut zu machen und diese zu diskutieren (beispielsweise die wörtliche Vorgabe von Arbeitsanweisungen und das Verbot, weitere Hinweise und Hilfestellungen zu geben). Zugleich bietet die Auseinandersetzung mit verschiedenen Instrumenten die Möglichkeit, vor dem Hintergrund der bisher in der Veranstaltung besprochenen Inhalte einen Überblick über diagnostisch

relevante Inhaltsbereiche und mögliche Aufgabenstellungen zu erhalten. Anhand von Überlegungen zu möglichen Lösungsstrategien von Kindern zu unterschiedlichen Aufgaben bietet sich die Möglichkeit, die Kenntnis kindlicher Entwicklungsprozesse konkret in die Praxis zu übertragen und dabei einen Einblick in die Bandbreite der Problematiken zu erhalten, die hinter einem „richtigen“ oder „falschen“ Ergebnis stehen kann.

Im Hinblick auf förderdiagnostische Instrumente sollen sich die Studierenden darüber bewusst werden, welche Erkenntnisse sie als Grundlage der Planung ihrer pädagogischen Arbeit benötigen und überlegen, wie diese im pädagogischen Alltag erhoben werden können. Bezogen auf informelle Verfahren und Beobachtungen sollten die Probleme der „ungewollten“ Filterung von Ergebnissen durch den Beobachter thematisiert werden.

Hinweis zum Vorgehen/Arbeitsaufträge

Aufgabe: Vergleich verschiedener Diagnoseverfahren

Analysieren Sie das vorliegende Diagnoseinstrument hinsichtlich folgender Aspekte:

- Zielgruppe
- Durchführung
- Inhaltsbereiche (ggf. mit kurzen Beispielen zu einigen Inhaltsbereichen, die besonders interessant erscheinen oder sich nicht unmittelbar erschließen)
- Auswertungsverfahren
- eigene kritische Bewertung (z.B. Erkenntnisgewinn, Handhabbarkeit)

Zunächst sollten die Studierenden nur die Aufgaben aus einem Diagnoseverfahren erhalten und verschiedenen Inhaltsbereiche zuordnen, um dann die Inhaltsbereiche zu benennen, die in dem Verfahren vorkommen. Erst im Anschluss daran wird auch das Handbuch des Verfahrens verfügbar gemacht. So können die Aufgaben vor dem Hintergrund des Wissens über Vorläuferfähigkeiten analysiert werden. Würde das Handbuch direkt mit ausgegeben, wird dieser Analyseschritt übersprungen, da dort die Aufgaben gruppiert und mit Überschriften und Erklärungen versehen sind. Im Laufe der Analyse sollte das Handbuch aber verfügbar sein, da hierdurch Zielgruppe, Testanweisungen usw. erfasst werden können.

Die Bearbeitung erfolgt in Kleingruppen zu unterschiedlichen Diagnoseverfahren (standardisierte und informelle), die Ergebnisse werden im Anschluss für die Gesamtgruppe schriftlich aufbereitet und gemeinsam bezüglich der Grundfragen zu verschiedenen Testverfahren diskutiert.

Einen weiteren **Impuls zur Diskussion über Norm- oder Individuumsorientierung** von Diagnostik kann anhand folgender Grafiken erfolgen (Kretschmann 2006, S.37, Kommentare N.K. in Anlehnung an Kretschmann).

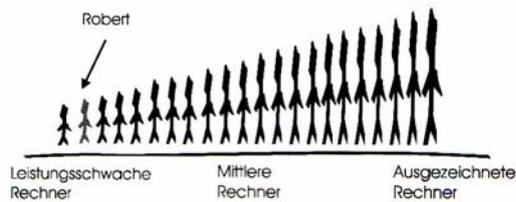


Abb. 1: Aussagen sozialnormorientierter Testungen

Für die pädagogische Arbeit genügt es nicht zu wissen, welchen Rangplatz ein Kind in seiner Altersgruppe aufweist.

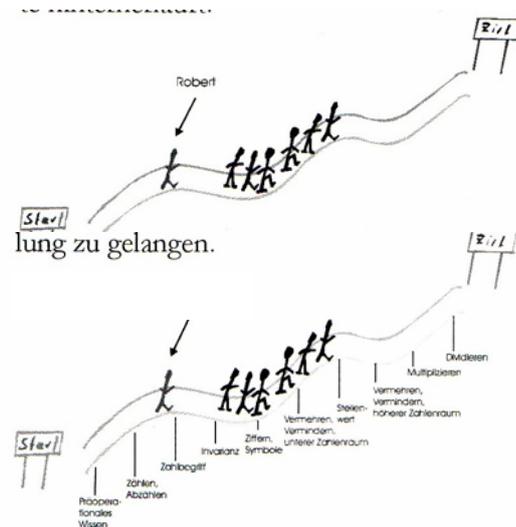


Abb. 3: Aussagen curriculumbezogener Diagnosen

Es genügt jedoch auch nicht zu wissen, wie weit ein Kind hinter den Durchschnittsleistungen seiner Altersgruppe „hinterherläuft“.

Benötigt werden hingegen Aussagen darüber, welche Lernschritte ein Kind vollzogen hat (Kompetenzorientierung), welches die nächsten Lernschritte auf dem Weg sind (entwicklungspsychologisches und lerntheoretisches Hintergrundwissen) und wie diese unterstützt werden können (lerntheoretisches und didaktisches Hintergrundwissen)

Aufgabe: Lösungsstrategien

Die Studierenden sollen verschiedene mögliche Lösungsstrategien von Kindern zu verschiedenen Testaufgaben „entwerfen“.

Beispiele zu realen Kinderstrategien finden sich u.a. in Heide (2005).

Eine Auswahl von Diagnoseinstrumenten:

Gängige standardisierte Verfahren sind z.B. ZAREKI, OTZ und DEMAT. Die neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern (ZAREKI und die Vorschulversion ZAREKI-K) wurde u.a. vor dem Hintergrund von Dehaenes *Triple-Code-Model* entwickelt. Der Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ) wurde auf Basis des UGT (*Utrechtse Getalbegrip Toets*) entwickelt und erfasst Niveaus der Zahlbegriffsentwicklung zwischen viereinhalb und sieben Jahren unter Berücksichtigung von entwicklungspsychologischen Aspekten (Piaget) und den Bereich und dem Bereich des Zählens. Der Deutsche Mathematiktest für erste Klassen (DEMAT 1+) ist als Gruppentest zur Erfassung der Rechenleistung einer gesamten Schulklasse konzipiert worden.

Eine Übersicht über die auf dem Markt befindlichen, standardisierten Verfahren findet sich in Hasselhorn (2005), ein Vergleich ausgewählter Verfahren aus Sicht einer Lehrkraft liefert Werner (2003).

Neu auf dem Markt ist das elementarmathematische Basisinterview (EMBI), ein materialbasiertes interview (im Gegensatz zu den sonst meist bildgestützten Aufgaben), das als deutsche Fassung des Abschnitts zu den Vorläuferfähigkeiten des australischen ENRP (Early Numeracy Research Project) innerhalb eines Forschungsprojektes entwickelt wurde (Peter-Koop et al 2007). Eine Einordnung ob Schüler/innen „besonderen Förderbedarf“ haben ermöglicht das Einzeltestverfahren BESMath-Berner

Screening Mathematik, das im Auftrag des Kantons Bern in Zusammenarbeit von Wissenschaftler/innen und Lehrkräften entwickelt wurde und im Internet frei verfügbar ist (Moser Opitz, Berger, Reusser 2008).

Lorenz (2003) stellt für eine informelle Überprüfung „Aufgaben zum Überprüfen einzelner auffälliger Schüler im Rahmen des Unterrichts“ vor, die für den Anfangsunterricht mündlich und ab Ende der ersten Klassen schriftlich in kleinen Gruppen unter Aufsicht des/der Lehrenden bearbeitet werden können. Ein weiteres nicht-standardisiertes Verfahren ist die Prozessdiagnose mathematischer Kompetenzen in den Schuljahren 1 und 2, die im Sinne eines Kompendiums Checklisten und Aufgaben zu verschiedenen lernrelevanten Aspekten und Prozessen zur Verfügung stellt, welche eine kindnahe pädagogische Diagnostik ermöglichen sollen. Ebenso finden sich im heilpädagogischen Kommentar zum Zahlenbuch (Moser Opitz/Schmassmann 2002) Aufgaben zur Feststellung des Lernstandes. Zahlreiche weitere Veröffentlichungen enthalten, unterschiedlich stark systematisiert und in verschiedenem Umfang, Aufgaben zur Einschätzung des Lernstandes im Kindergarten und/oder zu Schulbeginn.

Literatur zum Veranstaltungsthema „Diagnostik“

- Aster, Michael von; Weinhold Zulauf, Monika; Horn, Ralf (2006): Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern. ZAREKI-R ; Manual. Frankfurt am Main: Harcourt Test Services.
- Behring, Karin; Kretschmann, Rudolf; Dobrindt, Yvonne (1999): Prozessdiagnose mathematischer Kompetenzen in den Schuljahren 1 und 2. Horneburg: Persen.
- Hasselhorn, Marcus (Hg.) (2005): Diagnostik von Mathematikleistungen. Göttingen: Hogrefe.
- Heide, Lili (2005): Flexible Strategien - beobachtet im letzten Kindergartenjahr. In: Grundschulunterricht, Jg. 52, H. 7-8, S.28-31.
- Krajewski, Kristin; Küspert, Petra; Schneider, Wolfgang (2002): Deutscher Mathematiktest für erste Klassen. DEMAT 1+ ; Manual. Göttingen: Belz Test (Deutsche Schultests).
- Kretschmann, Rudolf (2006): „Pädagnostik“ - Optimierung pädagogischer Angebote durch differenzierte Lernstandsdiagnosen, unter besonderer Berücksichtigung mathematischer Kompetenzen. In: Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren] Offenburg: Mildenberger, S.29-54.
- Lorenz, Jens Holger (2003a): Aufgaben zur Eingangs- und unterrichtsbegleitenden Diagnostik. Früherkennung von Rechenstörungen in Klasse 1 und 2. In: Praxis Grundschule, Jg. 26, H. 3, S.18-26.
- Lorenz, Jens Holger (2003b): Diagnostik mathematischer Fähigkeiten in Klasse 1 und 2. In: Grundschule, Jg. 35, H. 5, S.19-21.
- Moser Opitz, Elisabeth; Schmassmann, Margret (2002): Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch. Hinweise zur Arbeit mit Kindern mit mathematischen Lernschwierigkeiten. Ausg. für d. Schweiz. Zug: Klett u. Balmer (Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch Margret Schmassmann / Elisabeth Moser Opitz, 1).
- Moser Opitz, Elisabeth (2006): Förderdiagnostik: Entstehung - Ziele - Leitlinien - Beispiele. In: Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren]. Offenburg: Mildenberger, S.10-28.
- Moser Opitz, Elisabeth; Berger, Daniela; Reusser, Lis (2008): BESMath-Berner Screening Mathematik. Screening zum Erfassen von Schülerinnen und Schülern mit schwachen Mathematikleistungen <http://www.erz.be.ch/site/fb-volksschule-spezialunterricht-besmath.htm>, (letzter Zugriff 15.1.2008)
- Peter-Koop, Andrea; Wollring, Bernd; Spindeler, Birgitte; Grüßing, Meike (2007): Elementarmathematisches Basisinterview. Offenburg: Mildenberger.
- Werner, Birgit (2003): Förderdiagnostisch orientierte Verfahren für den Mathematikunterricht. In: Zeitschrift für Heilpädagogik, Jg. 54, H. 8, S.324-331.

Mathematik in Kindergarten und Grundschule

Inhalte und Ziele

"Neugier und Interesse der Kinder am mathematischen Handeln setzt eine vorbereitete Lernumgebung voraus, die viele Anregungen und Spielraum für das eigenständige Sammeln von Erfahrungen bietet."
(Diemer-Hohnholz 2005, S.40)

Im Bereich des Kindergartens sind andere Inhalte und Zielsetzungen angesiedelt als in der schulischen Vermittlung mathematischer Inhalte, auch wenn die Entwicklungen eng ineinander greifen. Es geht vor der Schule um die Anregung von und den bewussten Umgang mit mathematischen Erfahrungen im Alltag. Auch im Erstunterricht in der Schule ist es wichtig, an die Kenntnisse und Erfahrungen der Kinder anzuknüpfen und ihnen weitere Erfahrungen und Entdeckungen zu ermöglichen. Im Anfangsunterricht kann es wiederum, u.a. aufgrund der Vorerfahrungen, nicht um die schrittweise Einführung der einzelnen Zahlen und Ziffern bis zehn gehen, zumal dies auch dem Stand der Fachdidaktik vor dem Hintergrund konstruktivistischer Lerntheorien widersprechen würde (vgl. u.a. Brügelmann 1992; Lorenz 1997). In Kindergarten und Schule sollte der Vermittlung mathematischer Grundlagen das Prinzip des entdeckenden Lernens zugrunde liegen. Auch der Erstunterricht in der Schule sollte sich nicht auf einen Zahlenlehrgang beschränken, sondern vielmehr Gelegenheit bieten, Zahlen und andere mathematische Elemente zu erkunden und so ihre Eigenschaften zu entdecken und nutzen zu können. Die Förderung der Entwicklung des konzeptionellen Wissens ist der des prozeduralen Wissens dabei im Kindergarten wie in der Schule mindestens gleich zu stellen und in fachübergreifende Lernziele einzubeziehen (vgl. Krauthausen 1998). Der Schritt hin zu einer zunehmenden Formalisierung der Fähigkeiten ist dabei das, was den spezifisch schulischen Zugang auszeichnet. Bezogen auf Förderung von Kindern mit Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht ist zunächst zwischen verschiedenen Modellen, beginnend mit binnendifferenzierten Maßnahmen im Unterricht, zu unterscheiden, zwischen denen in Kenntnis ihrer Vor- und Nachteile eine Entscheidung getroffen werden muss.

Zentrale Inhalte

- Mathematik findet sich „überall“ – Ziele und Inhalte im Kindergarten
- Ziele im Anfangsunterricht
- Merkmale von verschiedenen Arten der Förderung

Zielsetzung

Die Studierenden sollen sich damit auseinandersetzen, welche Art von Mathematiklernen vor Schulbeginn angemessen erscheint und wie im Anschluss daran der mathematische Erstunterricht verlaufen kann. Vor dem Hintergrund der bekannten Vorläuferfähigkeiten dient diese Sitzung der Zusammenschau des Gelernten und bietet Ausblick auf Fragen der Förderung/Unterstützung von Kindern in ihrer mathematischen Entwicklung. Das Thema der Förderung und damit verbundener Entscheidungen sollte zumindest kurz diskutiert werden.

Hinweise zum Vorgehen/Arbeitsaufträge

Die Studierenden sollen in Kleingruppen Ziele und Inhalte im Sinne eines Curriculums für Mathematik im Kindergarten bzw. im Anfangsunterricht (je nach Studienschwerpunkt) erarbeiten. Diese werden auf Metaplankarten notiert und dann gemeinsam gesammelt, sortiert und diskutiert. Die Sammlung sollte dann anhand von Zielen und Inhalten ergänzt werden, die in der Literatur genannt werden (wobei diese Ziele und Inhalte ebenfalls auf Metaplankarten vorbereitet sind und in die erstellte Sammlung eingefügt werden) (vgl. Grassmann 2005, 2005a und Wittmann 1994).

Anhand von Praxisbeispielen aus der Literatur können die Studierenden einen Einblick bekommen, wie die Umsetzung der Maßgabe "Mathematik findet sich überall da, wo Dinge in eine bestimmte Beziehung gebracht und Vergleiche angestellt werden müssen" konkret aussehen kann (Diemer-Hohnholz 2005, S.40).

Literatur zum Veranstaltungsthema „Mathematik in Kindergarten und Grundschule“

- Brügelmann, Hans (1992): Geschlossene Gehirne und offener Unterricht. In: Die Grundschulzeitschrift, H. 54, S.2–3.
- Diemer-Hohnholz, Erika (2005): Mathematik im Alltag von Kindern. Mathematische Strukturen entdecken und verstehen. In: Grundschule, Jg. 37, H. 10, S.40–43.
- Grassmann, Marianne (2005a): Im Kindergarten Mathematik unterrichten? In: Grundschule, Jg. 37, H. 1, S.20–23.
- Grassmann, Marianne (2005b): Mathematik in der Schuleingangsphase. In: Grundschule, Jg. 37, H. 10, S.28–30.
- Krauthausen, Günter (1998): Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Die Grundschulzeitschrift, Jg. 12, H. 119, S.54–61.
- Lorenz, Jens H. (1997): Über das Verstehen von Mathematik. In: Grundschule, Jg. 29, H. 10, S.26–28.
- Schaarschmidt, Monika (2007): Diesmal: Mathematik mit Dosen. In: Kindergarten heute, Jg. 37, H. 3, S.34–35.
- Wittmann, Erich Ch. (1994): Grundideen der mathematischen Inhaltsbereiche der Grundschule. In: Das Zahlenbuch, Lehrerband. Stuttgart, S.7.

Lernschwierigkeiten

Definitionen, Erklärungsansätze, Inhaltsbereiche

Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht oder auch Rechenschwäche sind schwer zu umgrenzende Phänomene. Definitionen, Diagnose und Erklärungsmodelle sehen sehr verschieden aus, je nachdem, mit welchem Ziel und vor welchem theoretischen Hintergrund sie erfolgen und ob z.B. eine Differenzdiagnostik zum Erhalt von Geldern für zusätzliche Förderung durchgeführt wird, oder etwa eine Förderdiagnostik mit dem Ziel für den/die Lehrer/in (oder die Förderkraft) eine Grundlage für didaktische Entscheidungen zu erhalten. Eine mindestens ebenso große Bandbreite zeigt sich bei den Modellen zur Erklärung von Rechenschwäche/Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht – von neurologischen bis hin zu unterrichtsbezogenen Erklärungen. Eindeutige Ursachen konnten vor keinem Hintergrund belegt werden. Deutlich ist also zumindest, dass es in diesem Bereich keine einfachen Kausalzusammenhänge gibt. Somit bietet die systemische Sichtweise den umfassendsten Einblick in die Entstehungszusammenhänge von Lernschwierigkeiten/Rechenschwäche. So vielfältig die Ursachen sind, so eindeutig sind die Inhaltsbereiche, in denen die Hauptschwierigkeiten auftreten. Neben dem zählenden Rechnen als einem Hauptmerkmal und der Tatsache, dass rechenschwache Kinder insgesamt wenig flexibel und eher mechanisch mit Aufgaben umgehen, konnten immer wieder Probleme in folgenden Bereichen dokumentiert werden:

- Zahlbegriff/-verständnis und später das Herstellen von Zahlbeziehungen
- Zehnerübergang
- Dezimalsystem
- Operationsverständnis
- Rechts-links-Wahrnehmung
- visuelle Wahrnehmung
- Verständnis von Veranschaulichung

Zentrale Inhalte

- Inhalts-/Problembereiche, die bei Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht immer wieder auftauchen
- Begriffsbestimmung/Definition – unterschiedliche Definitionen und ihre Hintergründe
- Der systemische Erklärungsansatz zu Ursachenzusammenhängen

Lernziele

Die Studierenden sollen sich erneut mit der Frage befassen, was eine/n kompetente/n Mathematikschüler/in ausmacht und in welchen Bereichen bei leistungsschwachen Schüler/innen Schwierigkeiten auftreten. Dies bietet zugleich Gelegenheit, das Wissen über zentrale Vorläuferfähigkeiten zu rekapitulieren. Die zentralen Inhaltsbereiche, welche für Schüler mit Lernschwierigkeiten relevant sind, sollen vor diesem Hintergrund zusammengetragen werden.

Verschiedene Definitionen und Erklärungsmodelle zu Rechenschwäche/Lernschwierigkeiten sollen verglichen und auf ihre Implikationen für den pädagogischen Alltag hin untersucht werden.

Anschließend soll im Hinblick auf die eigene Diagnostik die Problematik des zählenden Rechnens erneut aufgegriffen werden.

Hinweise zum Vorgehen/Arbeitsauftrag

Aufgabe: Inhaltsbereiche

Anhand eines eigenen Fallbeispiels sollen sich die Studierenden Gedanken machen, was für sie „eine/n „rechenschwache/n“ Schüler/in auszeichnet. Von dieser erfahrungsbasierten Sammlung ausgehend werden anhand von Fallbeispielen aus der Literatur die Inhaltsbereiche zusammengetragen, die bei Kindern mit Lernschwierigkeiten als zentrale Problemfelder gelten können.

Aufgabe: Stilles Gespräch zur Begriffsbestimmung

Zur Begriffsbestimmung von Lernschwierigkeiten/Rechenschwäche werden verschiedene Definitionen zur Verfügung gestellt, über die die Studierenden in einem stillen (Schreib-) Gespräch diskutieren sollen. Anschließend soll gemeinsam diskutiert werden, wie sich die Definitionen unterscheiden und welche davon hilfreich für pädagogische Kontexte erscheinen. Diese Diskussion kann dann nachbereitend durch Lektüre vertieft werden, die noch einmal die verschiedenen Definitionsarten systematisiert und kritisch beleuchtet (Moser Opitz 2004).

Textanalyse : Ursachen von Rechenstörungen

Zur Frage der Erklärungsmodelle bekommen die Studierenden zwei Textausschnitte ausgehändigt:

- eine umfeldorientierte Erklärung zum „Teufelskreis Rechenstörung“ (Ganser 2004, S.27/28)
- eine Kind-/defizitorientierte Erklärung mit neurowissenschaftlichem Hintergrund (Jacobs/Petermann 2005, S.75-77)

Die Texte werden unter folgenden Fragen in Kleingruppen bearbeitet:

- Welche Ursachen werden hier herangezogen?
- Wie hilfreich ist das?
- Welche weiteren Ursachen kommen in Betracht?

Beide Textausschnitte beleuchten einseitig nur einen Ursachenbereich. Bekommen die Arbeitsgruppen jeweils nur einen Text, können sowohl die entstehenden Widersprüche der Studierenden zu den Texten, als auch solche zwischen den Texten hin zu einer systemorientierten Sichtweise aufgelöst werden und die Ursachenfelder mit eigenen Vorstellungen und vor dem Hintergrund verschiedener Erklärungsmodelle reflektiert werden. Zu beachten ist, dass die Studierenden davon ausgehen werden, dass ihnen Texte mit angemessenen Erklärungen zum Phänomen Rechenschwäche vorgelegt werden und sich daher eine kritische Betrachtung nur verzögert entwickelt. Das Vorgehen bietet daher zugleich die Möglichkeit den eigenen Umgang mit wissenschaftlicher Literatur zu reflektieren. Methodisch erscheint es sinnvoll, zunächst die im Text gefundenen sowie die von den Studierenden selbst ergänzten Ursachen mit Metaplankarten zusammenzutragen und zu systematisieren. Die Seminarleitung verbindet die zusammengetragenen Ergebnisse dann mit den Hintergründen verschiedener Erklärungsmodelle und bettet sie in die systemische Sichtweise ein.

Die folgenden Aufgaben, die beispielsweise zur Bearbeitung in Heimarbeit aufgegeben werden können, dienen dazu die Problematik des zählenden Rechnens im Kontext der eigenen Diagnostik

wieder aufzugreifen und sich zugleich mit einem Vorteil des geplanten informellen Verfahrens – der Möglichkeit des flexiblen Umgangs mit dem eigenen Leitfaden – auseinander zu setzen. Bezüglich des ersten Teils der Aufgabe ist dabei zu beachten, dass mit den Studierenden die Begründung für die genaue Auswahl der Zahlen diskutiert wird und diese auf ihre Rolle für den Gewinn diagnostischer Erkenntnisse hin untersucht werden. So ist es z.B. nicht nur wichtig die Aufgaben nach ansteigendem Schwierigkeitsgrad zu wählen, sondern auch Möglichkeiten zur Anwendung unterschiedlicher Kopfrechenstrategien – wiederum auf verschiedenen Niveaus – durch die Wahl der Zahlen nahe zu legen.

Aufgabe: Diagnose – Zählendes Rechnen

1. Zu Beginn des zweiten Schuljahres möchten Sie bei einigen Kindern den Lernstand zur Addition und/oder Subtraktion im Einzelinterview erheben. Stellen Sie dazu insgesamt max. 15 Aufgaben zusammen (mit Begründung der von Ihnen gewählten Zahlenbeispiele und der Abfolge der Aufgaben)!
2. Im Folgenden finden Sie einen Ausschnitt aus dem Protokollbogen eines Interviews mit Sina (zweites Schuljahr) zur Addition im Hunderterraum.

Aufgabe	Ergebnis des Kindes	Bemerkungen zum Vorgehen des Kindes
26+4	30	Weil $6 + 4 = 10$
26+14	40	Braucht länger, erläutert das Ergebnis mit Bezug zur vorigen Aufgabe
26+44	60	Schnell unter Bezug zu den vorangegangenen Aufgaben
26+34	40	

Geplant waren zunächst nur die Aufgaben $26 + 4$ und $26 + 14$ in direkter Abfolge. Im tatsächlichen Interview wurde von dieser Planung abgewichen (s. linke Spalte des Protokollauschnitts). Wie lässt sich diese Abweichung begründen?

War die Intervention aus Ihrer Sicht sinnvoll?

Erläutern Sie ggf. einen Alternativvorschlag (mit ebenfalls kurzer Begründung)!

Eine weitere mögliche Fragestellung, die schriftlich oder mündlich erörtert werden kann, ist:

Welche Erkenntnisse aus Forschungsergebnissen zum Thema „Lernschwierigkeiten in Mathematik“ sind für Sie als zukünftige Lehrer/in bzw. zukünftiger Lehrer relevant?

Literatur zum Veranstaltungsthema „Lernschwierigkeiten“

Gaidoschik, Michael (2002): Rechenschwäche - Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für Lehrer/innen und Eltern. Wien: öbv & hpt.

Ganser, Bernd (Hg.) (2004): Rechenstörungen. Hilfen für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen der Mathematik. 5., überarb. und erw. Aufl. Donauwörth: Auer.

Jacobs, Claus; Petermann, Franz (2005): Diagnostik von Rechenstörungen. In: Hasselhorn, Marcus (Hg.): Diagnostik von Mathematikleistungen. Göttingen.: Hogrefe, S.71–104.

Krajewski, Kristin (2003): Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule: Eine Längsschnittstudie vom Kindergarten bis zur vierten Klasse. Hamurg: Kovac

Lorenz, Jens Holger; Radatz, Hendrik (2005): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. 7. Aufl. Hannover: Schroedel.

Moser Opitz, Elisabeth (2004): Dyskalkulie: Krankheit, Erfindung, Mythos, Etikett...? In: Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, H. 2, S.179–190.

Materialien (s.Anlage)

Arbeitsauftrag zur Erarbeitung der Frage, was „Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht“ (inhaltlich) bedeuten

Zitate: Definitionen Rechenschwäche mit Quellenangaben – Grundlage für stilles Gespräch

Folie: Ursachen Rechenschwierigkeiten und systemische Erklärung Rechenschwierigkeiten

Pädagogische Möglichkeiten

Arbeitsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht

Arbeitsmittel sind ein zentrales Hilfsmittel im mathematischen (Anfangs-) Unterricht. Sie dienen der Veranschaulichung von Rechenprozessen, der Darstellung von Lösungswegen und der Entwicklung verschiedener Lösungsstrategien. Sie sind damit eines der Hauptwerkzeuge um die Ablösung vom zählenden Rechnen zu erreichen.

Zugleich ist jedes Arbeitsmittel erst einmal selbst ein Lerninhalt. Das Verständnis seiner Struktur und der an ihm dargestellten Aufgaben und Rechenwege ist grundlegend für die Möglichkeit der Kinder, sich mithilfe des Arbeitsmittels vom zählenden Rechnen zu lösen. Es gibt eine Vielzahl verschiedener Arbeitsmittel, die jeweils Vor- und Nachteile aufweisen. Pädagog/innen sollten sich dieser Vor- und Nachteile bewusst sein, um die Stärken des jeweiligen Arbeitsmittels für die Kinder nutzbar zu machen und für sie eine geeignete Auswahl zu treffen.

Kriterien für ein gutes Arbeitsmittel sind (vgl. u.a. Radatz 2005):

- Verkörperung der fundamentalen Ideen der Arithmetik
- Fortsetzbarkeit in höhere Zahlräume
- Unterstützung der Überwindung des zählenden Rechnens u. a. durch Strukturierungsmöglichkeiten
- Übertragbarkeit in zeichnerische Darstellung
- Entwicklung und Darstellung eigener/unterschiedlicher Lösungswege
- Handhabbarkeit

Zwar sollte Kindern, wenn möglich, eine gewisse Freiheit bei der Auswahl der Arbeitsmittel gelassen werden, um ihnen den Zugriff auf das Arbeitsmittel zu erlauben, das am besten an ihre bisherigen Strategien und Vorstellungsbilder anknüpft. Dabei darf aber nicht vernachlässigt werden, dass die Kinder sich jedes neue Arbeitsmittel erst aneignen müssen, bevor sie es verstehen oder damit arbeiten können. Aus diesem Grund erscheint es sinnvoll, die zur Verfügung stehenden Arbeitsmittel zu begrenzen und sicherzustellen, dass die Kinder in mindestens zwei Arbeitsmittel eine intensive Einführung erhalten. Bei der einführenden Orientierung am Arbeitsmittel ist dabei darauf zu achten, dass den Kindern der Übergang von der Zahldarstellung am Arbeitsmittel zu Darstellung von Aufgaben und Rechenstrategien gelingt.

Zentrale Inhalte

- Funktionen von Arbeitsmitteln
- Kriterien für gute Arbeitsmittel
- (förderlicher) Einsatz von Arbeitsmitteln

Lernziele

Die Studierenden sollten darüber reflektieren, welche Funktion ein Arbeitsmittel hat und wie es zur Ablösung vom zählenden Rechnen beitragen kann. Konkrete Anregungen für den Einsatz zur Förderung können diskutiert werden, um den Studierenden einen ersten Einblick in Fragen der Gestaltung des Erstrechenunterrichts zu geben.

Hinweise zum Vorgehen/Arbeitsaufträge

Die Funktionen von Arbeitsmittel und Kriterien für gute Arbeitsmittel können im vom/von der Dozent/in angeleiteten Gespräch gemeinsam erarbeitet werden. Anschließend können die Studierenden sammeln, welche Arbeitsmittel ihnen bekannt sind. Die Sammlung kann ggf. ergänzt werden, wenn zentrale Arbeitsmittel nicht genannt werden.

Ausgehend von den eingangs dargestellten Kriterien zur Auswahl von Arbeitsmitteln beurteilen die Studierenden in Kleingruppen jeweils ein Arbeitsmittel. Danach werden die Kleingruppen so gemischt, dass nun in jeder neuen Gruppe jeweils ein Vertreter aus den vorherigen Gruppen vorhanden ist. Das Ergebnis dieses Austauschs kann dann in der Gesamtgruppe zusammengetragen und diskutiert werden.

Als Nachbereitung dient der Artikel von Gerster (2000) zur Überwindung des zählenden Rechnens und/oder der Artikel von Schipper (2005) zu guten Arbeitsmitteln im 20er Raum.

Im Anschluss kann z.B. durch eine Aufgabe zur Gestaltung einer konkreter Fördersituationen das erworbene Wissen in die Praxis übertragen werden. Die zuvor kennengelernten Kriterien und Zielsetzungen können so anhand konkreter Aufgaben diskutiert werden.

Aufgabe: Einsatz von Arbeitsmitteln

Anna (Ende Kl. 1) kann zwar Anzahlen strukturiert erfassen (z.B. zählt sie Punkte nicht einzeln ab, wenn sie in Form von zwei Würfelbildern gezeigt werden), benutzt den Zwanzigerrahmen aber fast ausschließlich, indem sie die Kugeln einzeln abzählt. Erläutern Sie aufeinander aufbauende Aufgabenstellungen, die Anna zu einer sinnvollen Nutzung des Rahmens verhelfen!

Aufgabe: Überwindung des zählenden Rechnens

In der Gesamtgruppe (mit Overhead oder Beamer) oder in Kleingruppen (mit Kopien) sollen die Studierenden Übungen zum Umgang mit Arbeitsmitteln bzw. zur Überwindung des zählenden Rechnens Ziele analysieren, d.h. vermutete Ziele erarbeiten und die Angemessenheit einzelner Aufgaben/Übungen beurteilen. Nutzbar sind hier z.B. Übungen, die Schipper (2005) darstellt. Die Übungen enthalten jeweils einen didaktischen Kommentar, der zur Bearbeitung durch die Studierenden abgedeckt werden kann.

Sinnvoll ist weiterhin die Diskussion folgender Fragen:

In einigen Klassen werden Kindern möglichst viele Arbeitsmittel zur freien Auswahl angeboten. Wie ist eine solche Entscheidung zu bewerten?

Literatur zum Veranstaltungsthema „Pädagogische Möglichkeiten“

Gerster, Hans-Dieter (2000): Wege zum nicht-zählenden Rechnen. In: Grundschulunterricht, Jg. 47, H. 7-8, S.33–35.

Radatz, Hendrik (2005): Hilfreiche und weniger hilfreiche Arbeitsmittel im mathematischen Anfangsunterricht. In: Lorenz, Jens Holger; Radatz, Hendrik (Hg.): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. 7. Aufl. Hannover: Schroedel, S.19–33.

Rottmann, Thomas; Schipper, Wilhelm (2002): Das Hunderter-Feld - Hilfe oder Hindernis beim Rechnen im Zahlenraum bis 100? In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jg. 23, H. 1, S.51–74.

Schipper, Wilhelm (2005): Schulische Prävention und Intervention bei Rechenstörungen. In: Die Grundschulzeitschrift, Jg. 19, H. 182, S.6–10& Materialteil, S.21ff

Empirische Erkundungen

Eigene Interview-/Beobachtungsleitfäden und Kolloquium zur pädagogischen Intervention

Das Ziel der exemplarischen Interviews und Beobachtungen, die die Studierenden durchführen sollen, ist es, möglichst genaue Informationen zum Lernstand in einem oder zwei Bereichen der mathematischen Entwicklung zu erfassen und auf mögliche pädagogische Interventionen hin zu analysieren. Ein wichtiger Aspekt in der Vorbereitung der Interviews ist die Auswahl und Begründung des gewählten Schwerpunktes. Dies wird in der Regel anhand der allgemeinen Bedeutung von Entwicklungsbereichen erfolgen – wenn den Studierenden aber Informationen über die Kinder im Voraus bekannt sind, sollten auch individuelle Faktoren einbezogen werden.

Die Entscheidung ob ein Interview oder eine Beobachtung durchgeführt wird sollte von den Studierenden selbst getroffen und begründet werden.

Für die ca. halbstündigen Interviews soll ein Leitfaden erstellt werden, der verschiedene Diagnoseaufgaben enthält, die mündlich oder schriftlich präsentiert und bearbeitet werden können. Bei Interviews mit Kindergartenkindern muss die Zeit entsprechend der Konzentrationsspanne der Kinder reduziert werden und ggf. die Befragung auf zwei Termine verteilt. Die Interviewsituation sollte so gestaltet werden, dass die Kinder die Aufgaben nicht nur lösen, sondern über Nachfragen Erkenntnisse zu ihren Strategien und Lösungswegen gewonnen werden können. Nicht nur die Nachfragen sondern auch die Auswahl der Aufgaben (bis hin zu den gewählten Zahlen) sollten möglichst viel Aufschluss über vorhandene Kompetenzen – beispielsweise operative Strategien – ermöglichen.

Für die Beobachtungen soll eine Situation gestaltet werden, in dem ein Spiel oder eine Aktivität ausgewählt und vorbereitet wird, die Rückschlüsse auf den gewählten Beobachtungsschwerpunkt zulässt. In der Vorbereitung ist darauf zu achten, dass die Kinder in der Gesamtsituation so agieren können, dass ihre Herangehensweisen an die enthaltenen mathematischen Probleme nicht zu sehr durch andere Elemente der Spielsituation überlagert werden und zugleich das Spiel/die Aktivität nicht nur als künstliche „Verpackung“ der mathematischen Elemente wirkt.

Als Anregung können dabei Diagnose- und Fördermaterialien, aber auch der normale Kindergarten-/Schulalltag genutzt werden.

Die Studierenden sollten die Beobachtungen/Interviews in Zweier- oder Dreier-Gruppen durchführen, damit ein intensiver Austausch über Planung, Verlauf und Auswertung möglich ist und sie Gelegenheit haben, mehrere Kinder in der Diagnosesituation zu erleben und auch einmal selbst den/die Interviewer/in bzw. Beobachter/in zu beobachten.

Wenn möglich sollten die Interviews/Beobachtungen mit Kindern unterschiedlicher Leistungsstärke durchgeführt werden, da so die angewendeten Strategien in ihrer Differenz deutlich zutage treten. Hierzu kann bei der Auswahl der Kinder etwa die Einschätzung der pädagogischen Fachkräfte oder auch eigene Vorerfahrungen mit den Kindern in der Gruppe genutzt werden.

Als Grundlage für die Analyse dient generell die während der Beobachtung/dem Interview erstellte Dokumentation. Auch dies wird durch die Gruppenarbeit der Studierenden möglich. Dennoch sollten die Interviews/Beobachtungen wenn möglich auch auf Video aufgezeichnet werden, um später Lücken im Protokoll zu füllen und um besonders relevante Stellen in Form einer Transkription genau analysieren zu können.

Die Auswertung sollte sich insgesamt sowohl auf das Kind und seine Strategien bzw. Lösungen beziehen als auch auf die Reflexion des Verhaltens der Studierenden selbst in den diagnostischen

Situationen. Natürlich müssen auch die erstellten Instrumente im Nachhinein kritisch betrachtet und ggf. Überarbeitungsvorschläge gemacht werden.

Pädagogische Möglichkeiten, die sich aus dem Interview/der Beobachtung ergeben, können dann im Rahmen eines Kolloquiums dargestellt werden. Anknüpfend an die Erkenntnisse aus dem Interview soll eine konkrete, auf eines der interviewten Kinder individuell zugeschnittene, pädagogisch/didaktische Idee entwickelt werden.

Hinweise zum Vorgehen/Arbeitsaufträge

Als Vorbereitung zum eigenen Gestalten von Interviewaufgaben/Beobachtungen, sowie als Anregungen durch konkrete Beispiele werden in den jeweiligen Sitzungen zu den unterschiedlichen Vorläuferfähigkeiten immer wieder die Konstruktion und Analyse von diagnostischen Aufgaben eingebunden. Die gemeinsame Diskussion am konkreten Beispiel bildet die Grundlage für die Auswahl und Begründung der Aufgaben in den Interviews/Beobachtungen.

Auch zu Dokumentationsformen findet eine gemeinsame Übung – inklusive einer Erprobung der eigenen Bögen anhand eines Videoausschnittes – statt, damit die Studierenden sich über die möglichen Problembereiche und zu treffenden Entscheidungen bezüglich ihrer Protokollformen Gedanken machen können. Für den Testlauf entwickeln die Studierenden außerhalb der Seminarzeit anhand eines Ausschnitts aus einem Interviewleitfaden einen Protokollbogen. Zunächst wären dann einige der zuhause entworfenen Protokollbögen zu besprechen und Entscheidungen, die bei der Gestaltung gefällt werden müssen, zu thematisieren. Im Anschluss werden die Bögen anhand des zum Interviewleitfaden gehörigen Videoausschnittes getestet und dann unter folgenden Aspekten diskutiert:

- Was ist an dem Kind aufgefallen?
- Was ist am Interviewer/innenverhalten bzw. -aufbau aufgefallen?
- Wie haben die Protokollbögen funktioniert?

Wenn kein Zugriff auf entsprechendes Filmmaterial besteht, sollte die Diskussion der entworfenen Bögen entsprechend ausführlicher gestaltet werden.

Die Interview-/Beobachtungsleitfäden werden im *Peer-Review* und in einer Seminarsitzung (je 4 -6 Gruppen an einem Termin) besprochen und entsprechend überarbeitet. Die Kommentierung im Rahmen des *Peer-Reviews* sollte schriftlich in Heimarbeit erfolgen. Der/dem Dozent/in sollten dann die bereits anhand des *Peer-Reviews* überarbeiteten Versionen zugesandt werden. In der Besprechung im Seminar hat die/der Dozent/in dann die Möglichkeit, aufgetretene zentrale Probleme zu thematisieren. Die abschließende Bearbeitung erfolgt dann wiederum zuhause.

Für die schriftliche Ausarbeitung zu den entworfenen Interview-/Beobachtungsleitfäden sollten den Studierenden Bewertungskriterien an die Hand gegeben werden (mögliche Arbeitsfragen dazu: s.u.).

Für den „Markt der Kindergedanken“ sollen die Studierenden ein interessantes Ereignis in ihrer Diagnosesituation auswählen und für das Seminar mit einer Arbeitsfrage präsentieren – anhand eines Posters/einer Transkription oder auch anhand des Videoausschnittes. Ausgewählt werden könnte hier eine Situation, in der das Kind eine interessante oder auch schwer nachvollziehbare Erklärung zu seiner Bearbeitungsstrategie liefert, oder auch eine Bearbeitungssequenz, die einen bestimmten Entwicklungsaspekt sehr anschaulich werden lässt. Interessant können besonders elaborierte oder besonders problemhaltige Bearbeitungen ebenso sein wie solche, die zunächst schwer nachvollziehbar erscheinen oder besonders vielschichtige Interpretationen zulassen.

Für das abschließende Kolloquium bereiten sich die Studierenden in ihrer Gruppe gemeinsam vor, sie präsentieren ihre Ergebnisse aber getrennt voneinander jeweils 5-10 Minuten bezogen eines der Kinder. Neben den vortragenden Studierenden ist jeweils auch die Gruppe anwesend, die im Rahmen des *Peer-Reviews* das Diagnoseinstrument bereits kennen gelernt hat. In einer anschließenden, ca. fünfminütigen Befragung hat die Seminarleitung die Möglichkeit, Auswahl und Begründung der pädagogischen Idee vor dem Hintergrund der Diagnose genauer zu hinterfragen.

Materialien (s. Anlage)

- Arbeitsfragen zur Ausarbeitung der empirischen Erkundungen
- Übungsaufgabe zum eigenen Protokollbogen

D Anlagen

Beispielhafter Veranstaltungsaufbau- Ablaufplan

Im Folgenden findet sich ein Vorschlag zur zeitlichen Gestaltung des Moduls im Rahmen eines zweisemestrigen Seminars (4 Semesterwochenstunden, 6 ECTS)

Sitzung	Thema
übergreifend	Vorbereitung empirische Erkundungen (s.u.)
1	Einführung/Begrüßung Vorläuferfähigkeiten und Schulbeginn
2	Vorläuferfähigkeiten Arithmetik I: Die kindliche Sichtweise auf Zahlen und Theorien zur Zahlbegriffsentwicklung
zu Hause	Nachbereitung Erwerb der Zahlwortreihe Vorbereitung Entwicklung des Mengenverständnisses
3	Vorläuferfähigkeiten Arithmetik II: Mengenverständnis, Piaget
4	Grundlagen von Rechenprozessen I: Erstes Rechnen- Zählendes Rechnen
5	Grundlagen von Rechenprozessen II: Zahlzusammenhänge, Operationsverständnis
zu Hause	Vorbereitende Lektüre zu den Komponenten der visuellen Wahrnehmung und der Raumvorstellung
6	Vorläuferfähigkeiten Geometrie
7	Diagnostik I: Vergleich diagnostischer Instrumente
8	Diagnostik II: Diagnoseformen und ihre Merkmale
zu Hause	Eigene Interviewleitfäden/Beobachtungssituationen entwerfen Eigene Protokollbögen entwerfen
9, 10, 11	Eigene (Förder)diagnostik –Peer-Review
zu Hause	Protokollbögen entwerfen
12	Protokollbögen testen
13	Förderung – Formen pädagogischer Intervention
14	ggf. Vertiefung von Inhalten, die in vorigen Sitzung nicht ausreichend behandelt werden konnten
Vorlesungsfreie Zeit	Protokollbögen und Interviewleitfäden überarbeiten Durchführung der Interviews/Beobachtungen
	2. Semester
15	Markt der Kindergedanken
16	Lernschwierigkeiten I: Inhaltsbereiche
17	Lernschwierigkeiten II: Definitionen und Erklärungsmodelle
zu Hause	Lesen zur Überwindung des zählenden Rechnens
18	Pädagogische Möglichkeiten/Förderung I: Arbeitsmittel
19	Pädagogische Möglichkeiten/Förderung II: Sachrechnen
20	Pädagogische Möglichkeiten/Förderung III: Geometrische Grundlagen
21	Vergleich verschiedener (Unterrichts-) Materialien/Förderprogramme
22	Arbeit an Fallbeispielen
23	Vorbereitung des Kolloquiums zu pädagogischen Möglichkeiten
zu Hause	
24,25, 26	Kolloquium: Pädagogische Möglichkeiten auf Basis der eigenen Diagnostik
27	Besprechung/Übung zu aufgetretenen allgemeinen Problemen/Fragen in den Kolloquien
28	Rückblick, Zusammenfassung, Evaluation

Vorbereitung Empirische Erkundung (eigene Diagnostik)

Die Vorbereitung auf die empirische Erkundung erfolgt verteilt auf das Semester in den Sitzungen zu den verschiedenen Inhaltsbereichen. Variiert werden dabei folgende Varianten der Bearbeitung

- diagnostische Aufgaben konstruieren und gemeinsam besprechen
- Analyse von Diagnoseaufgaben im Hinblick auf ihre Zielsetzung, Handhabbarkeit und den möglichen Erkenntnisgewinn
- Analyse und Interpretation von Kinderlösungen/produkten- Strategien erkennen und einordnen
- Entwicklung von pädagogischen Interventionen auf Grundlage einer Diagnose des Lernstandes

Zum überwiegenden Teil der Sitzungen findet sich im Hauptteil des Handbuches eine ausführliche Darstellung, die Lernziele und methodisches Vorgehen genauer erläutert.

Das dargestellte Beispielseminar ist so zusammengestellt, dass alle Themen vorkommen, die im Sinne des Modulthemas relevant erscheinen. Es kann in der konkreten Umsetzung aber durchaus sinnvoll sein, einige Bereiche ausführlicher zu behandeln und andere dafür zu kürzen oder wegfällen zu lassen.

Vorschlag zur Modulprüfung:

Prüfungsform: Portfolio und Präsentation im Seminar

Inhalt des Portfolios:

- schriftliche Vorbereitung der Beobachtungen/Interviews überarbeitete Version mit konkretem Beobachtungs-/Interviewleitfaden, Protokoll/Auswertungsbogen oder Auswertungsfragen/gewählte Dokumentationsform. Jeweils mit Begründung usw., Abgabe in den Semesterferien vor der Durchführung
- Dokumentation der Beobachtungen, Transkriptionen oder ausführliche Gedächtnisprotokolle mit kurzer schriftlicher Zusammenfassung der „Erkenntnisse“ – ca. 1 Seite pro Kind

Inhalt der Präsentation:

- Präsentation zu Schlussfolgerungen aus der Diagnose bezüglich passender pädagogischen Angebote

Der „Markt der Kindergedanken“ muss nicht in die Bewertung einfließen, da sich die Studierenden hier inhaltlich und in Bezug auf die Präsentationsform ausprobieren können sollen.

In Erweiterung des Kolloquiums wäre es – bei ausreichender Zeit - sinnvoll die Studierenden im zweiten Semester auf Basis der Diagnose die Förderung tatsächlich durchführen zu lassen und dann im Seminar zu reflektieren.

Fallbeispiele

Die folgenden Fallbeispiele können in der Seminarsitzung zu Lernschwierigkeiten genutzt werden (siehe Hinweise dort)

Sie können aber auch unter der folgenden Aufgabenstellung bearbeitet werden

- Welche Folgerungen ergeben sich aus der Schilderung im Hinblick auf die Förderung?
- Schlagen Sie einige konkrete Aufgabenbeispiele vor.

Beispiel 1: Monika

(vgl. Lorenz 2003)

Monika ist 7;10 Jahre alt und besucht die zweite Grundschulklasse und nimmt dort am Förderunterricht teil. Sie wurde in Polen geboren, lebt aber seit mehreren Jahren in Deutschland und hat vor dem Besuch der Grundschule ein Jahr lang einen Kindergarten besucht. Sie wohnt mit ihren Eltern und den beiden 12 und 15 Jahre alten Schwestern zusammen. Monika wirkt sehr schüchtern, erscheint dünn und zerbrechlich.

Die im Förderunterricht gestellten Aufgaben löst sie häufig mit dem Rechenrahmen, wie z.B. $23 + 18$:

Sie schiebt die ersten 20 Perlen ohne abzuzählen. Die noch fehlenden drei Kugeln schiebt sie einzeln nach links, anschließend sieben weitere, so dass sie nun drei vollständige Reihen auf dem Rechenrahmen hat. Sie schiebt dann eine weitere Reihe in einem Zug dazu und zählt daraufhin erneut 23 Kugeln ab sowie die anschließend hinzugefügten 17 Kugeln. Schließlich zählt sie, eine Kugel in die fünfte Reihe schiebend, bis 18. Das Ergebnis 41 liest sie nicht der Darstellung am Rahmen ab, sondern zählt mit den Fingern deutend erneut, von oben beginnend.

Monika rechnet ohne Material die folgenden Aufgaben:

$$60 + 7 = 72 \quad 52 + 6 = 66 \quad 41 + 8 = 58 \quad 43 + 21 = 54 \quad 23 + 47 = 34$$

$$46 - 20 = 36 \quad 52 - 40 = 10 \quad 78 - 15 = 65 \quad 95 - 35 = 35 \quad 100 - 3 = 80 \quad 73 - 7 = 30$$

Zu vorgegebenen Termen und Rechenoperationen gelingt es Monika nicht, passende Bilder zu malen oder Geschichten zu erfinden. Monika schreibt zweistellige Zahlen von rechts nach links.

Beispiel 2: Xhaver

(vgl. Lorenz 2003)

Xhaver ist Kosovo-Albaner und lebt seit 4 Jahren zusammen mit seinen Eltern in Deutschland. Er besucht die zweite Klasse einer Grundschule und fällt der Lehrer/in durch stetig abfallende Leistungen in Mathematik auf.

Xhaver weist zu diesem Zeitpunkt keine Sprachschwierigkeiten mehr auf. Allerdings war in der Vergangenheit aufgrund der politischen Situation in seinem Heimatland die Familienatmosphäre belastet, da Eltern und Großeltern der Opposition angehört hatten und einer Verfolgung ausgesetzt waren.

Die Lehrer/in führt mit Xhaver einen Test durch um seine Fähigkeiten im Zahlenraum bis 20 zu diagnostizieren.

Xhaver macht eine Reihe von Fehlern, z.B.:

$$12 + 5 = 16$$

$$6 + 13 = 18$$

$$7 + 8 = 14$$

$$18 + 0 = 0$$

$$8 + 8 = 17$$

$$9 + 3 = 13$$

$$5 + 12 = 18$$

$$3 + 9 = 13$$

$$0 + 10 = 0$$

$$16 + 4 = 12$$

$$4 + 16 = 12$$

$$8 + 11 = 3$$

$$8 + 7 = 1$$

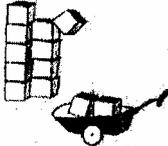
$$10 + 4 = 7$$

$$16 - 16 = 16$$

Beispiel 3: Jonas

(vgl. Lorenz 2003)

Jonas ist 8;5 Jahre und besucht eine dritte Klasse. Er beherrscht das kleine Einmaleins, hat aber zur Multiplikation nur unzureichende Vorstellungen ausgebildet.

Bild	Von Jonas zugeordnete Rechnung	Jonas' Begründung
	$2 \cdot 3$	„Da sind zwei und da drei Vögel.“
	$3 \cdot 7$	„Da sind drei und da sieben Bonbons.“
	$10:3$	„Da sind 10 Würfel und drei sind weg.“

Beispiel 4: Susanne

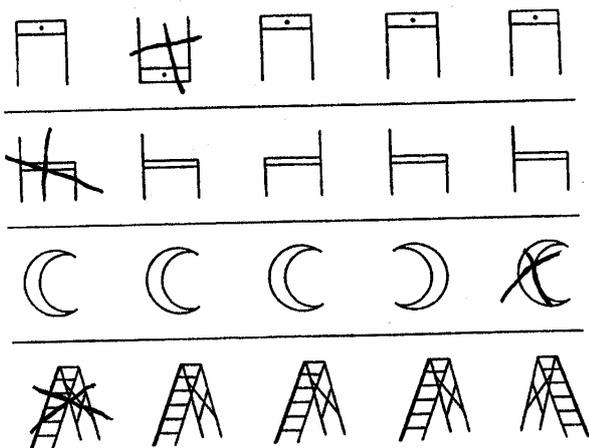
(vgl. Lorenz 2003)

Susanne ist 7;10 Jahre und besucht die zweite Klasse einer Grundschule. Susanne hat eine ältere Schwester und wohnt mit den beiden berufstätigen Eltern in eher ländlicher Umgebung. Trotz der beruflichen Belastung helfen die Eltern ihr bei den Hausaufgaben. Der/dem Lehrer/in ist bekannt, dass Susanne auf dem rechten Auge fast vollständig erblindet ist.

Im Folgenden finden Sie Susannes Bearbeitung verschiedener Aufgaben

„Addieren und Subtrahieren“

① $1 + 2 + 3 = 6$ $5 - 2 - 1 = 2$
 $1 + 3 + 1 = 5$ $4 - 1 - 2 = 1$
 $2 + 1 + 1 = 4$ $4 - 3 + 5 = 6$



„Rechnen bis 10“

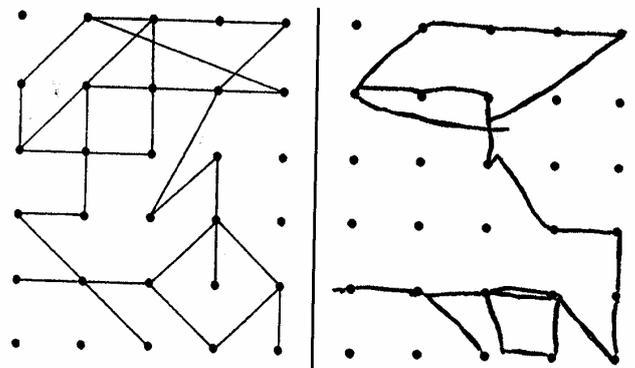
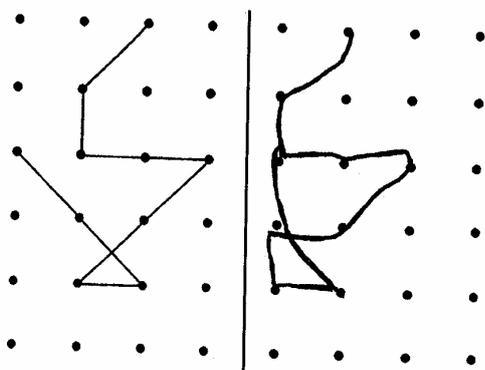
① $7 - 2 = 5$ $7 - 4 = 3$
 $4 - 1 = 3$ $2 - 1 = 1$

② $8 - 5 = 3$
 $9 - 6 = 3$

③ $7 - 4 = 3$ $7 - 6 = 1$
 $7 - 2 = 5$ $7 - 3 = 4$

④ $10 - 8 = 2$
 $8 - 6 = 2$
 $7 - 5 = 2$
 $9 - 7 = 2$
 $4 - 2 = 2$

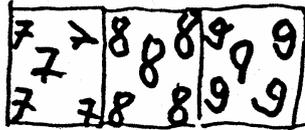
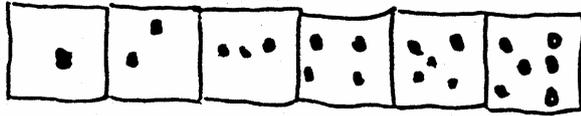
⑤ $6 - 4 = 2$
 $9 - 6 = 3$
 $10 - 6 = 4$
 $7 - 2 = 5$
 $9 - 3 = 6$



Beispiel 6: Vorstellungen vom Zahlraum und zu Rechenoperationen

(vgl. Lorenz/Radatz 2005)

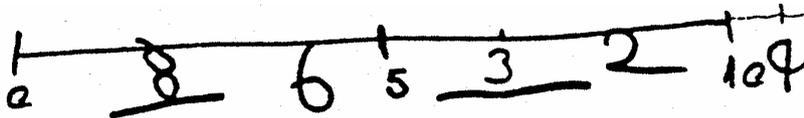
Simon (Kl. 2) zeichnet die Anordnungen auf den Würfelseiten



Oliver (Kl. 4) zeichnet ebenfalls Würfelbilder:



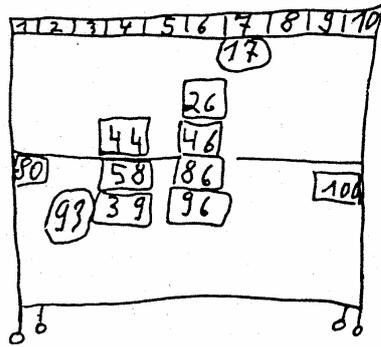
David (Kl. 1) zeichnet die Zahlen auf dem Zahlenstrahl:



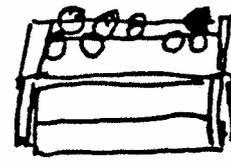
Sven (Kl. 3) löst Subtraktionsaufgaben mit Hilfe der Strich-Punkt-Darstellung:

□□□□□□□ :	742
	-365
	427
□□□ :::	

Henk (Kl. 2) zeichnet sein Bild der Hundertertafel, Sebastian (Kl. 3) arbeitet am Rechenrahmen.



$$27 + 8 =$$



14



Literatur

- Lorenz, Jens Holger (Hg.) (2003): Lernschwache Rechner fördern. Ursachen der Rechenschwäche ; Frühhinweise auf Rechenschwäche ; diagnostisches Vorgehen. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Lorenz, Jens Holger; Radatz, Hendrik (Hg.) (2005): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel.

Zahlbegriffsentwicklung

Aufgabe 1

Wember erläutert in seinem Artikel „Die Entwicklung des Zahlbegriffs aus psychologischer Sicht“ die Begriffe Seriation und Invarianz.

- a) Nennen Sie jeweils eine klassische Aufgabe Piagets und die aus ihr gezogenen Schlussfolgerungen bezogen auf die Entwicklung des kindlichen Denkens!
- b) Was hat die Entwicklung in diesen Bereichen mit der Ausbildung des Zahlbegriffs zu tun?

Zählentwicklung

Aufgabe 2

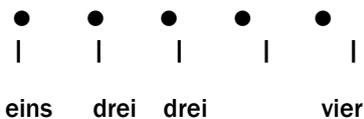
Untersuchen Sie das folgende Fallbeispiel vor dem Hintergrund der Zählprinzipien von Gelman & Gallistel:

Samantha (4;5) was presented with a collection of candies randomly arranged on a table. Her job was to determine the number of candies by counting. She had no difficulty in saying the number words; indeed, she could easily reach 100. Yet in counting the candies, she made many errors. On one try, she would answer 23; on another 24; on yet another 22. Which was right? She had no idea. Her procedure was to point to each candy in its original location; she did not bother to push any candies aside after counting them. Because of this, she forgot which were counted and which were not. She counted several candies twice and several not at all, and got different results each time. This inconsistency did not disturb her in the slightest.

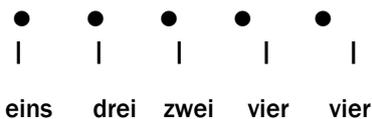
(Baroody/Wilkins 2004)

Aufgabe 3

- a) Beschreiben Sie das Verhalten von drei Kindern K1, K2, K3, die – beim Auszählen einer siebenelementigen Menge – jeweils genau eines der drei ersten Zählprinzipien von Gelman & Gallistel (Eindeutigkeitsprinzip, Prinzip der stabilen Ordnung, Kardinalprinzip) **nicht** beachten!
- b) Im Folgenden ist ein Zählprozess (bezogen auf eine fünfelementige Plättchenmenge) dargestellt:



Dasselbe Kind:



Auf die Frage nach der Anzahl der Plättchen antwortet das Kind in beiden Fällen mit „Vier!“

Welche Zählprinzipien sind erfüllt/nicht erfüllt?

Aufgabe 4

Ein Kind soll eine Anzahl von Objekten zählen. Welche Fehler können auftreten?

(Moser Opitz 2001, S.88)

Aufgabe 5:

Nach einer Untersuchung von Fuson und anderen lassen sich in der Phase des Erwerbs der Standardzählreihe bei den Zählversuchen von Vorschulkindern drei charakteristische Abschnitte ausmachen.

Geben Sie für die beiden Kinder im folgenden Beispiel diese Abschnitte jeweils an und charakterisieren Sie, worin sich diese Abschnitte unterscheiden!

Kind A (3;10)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 18, 19, 15, 18

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 18, 19, 16, 17, 18

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 18, 19, 16, 17, 18

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 18, 19, 15, 17, 18, 19, 17

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 18, 19, 15, 16, 17, 18, 19, 15, 17

Kind B (4;4)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 18, 40, 5, 6

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 18, 40, 5, 6, 7, 8

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 40, 16, 18, 10, 11, 13, 16, 18, 24, 28, 26, 23

Übergreifend/Diagnose

Aufgabe 6

Erläutern Sie unter Bezugnahme auf entwicklungspsychologische Befunde (Piaget; Zählprinzipien von Gelman/Gallistel; Zahlbegriffsentwicklung nach Fuson) die Auswahl folgender Aufgabenbereiche für eine Lernstandserhebung zum „Zählen“:

- Vorwärts zählen
- Weiter zählen von einer bestimmten Zahl aus
- Rückwärts zählen
- In Schritten zählen
- dieselbe Anzahl in verschiedenen Anordnungen bestimmen (z.B. linear eng beieinander bzw. weit auseinander; kreisförmig o.ä.)

Arbeitsauftrag zur Erarbeitung der Frage, was „Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht“ (inhaltlich) bedeuten (Fallbeispiele aus der Literatur finden sich im Anhang)

I Eigenes Fallbeispiel

- Notieren Sie kurz, um was für ein Kind es sich handelt (Alter, Schule, euer Bezug zu dem Kind...)?
- Welche *konkreten* Schwierigkeiten hat dieses Kind mit dem Fach Mathematik?
- Wie zeigt sich das, bzw. woher wisst ihr davon?
- Haben Sie Ideen zu den Ursachen der Probleme?
- Welche Hilfe bekommt dieses Kind?

II Fallbeispiele aus der Literatur

- Beschreiben Sie ganz kurz, was Sie für ein Text und Beispielkind hatten!
- Wie lassen sich die einzelnen Fehler des Kindes erklären?
- Welche *konkreten* Schwierigkeiten tauchen auf?
- Was könnten Ursachen für die Probleme sein?
- Welche generellen Problembereiche sind in dem Fallbeispiel angesprochen?
- Können Sie einen Bezug zu Ihrem eigenen Fallbeispielen und/oder Ihrer Vorstellung von Rechenschwäche finden?
- Gibt es in Ihren eigenen Fallbeispielen noch weitere generelle Problembereiche?

- 1) Diese Störung besteht in einer umschriebenen Beeinträchtigung von Rechenfertigkeiten, die nicht allein durch eine allgemeine Intelligenzminderung oder eine unangemessene Beschulung erklärbar ist. Das Defizit betrifft vor allem die Beherrschung grundlegender Rechenfertigkeiten, wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, weniger die höheren mathematischen Fertigkeiten, die für Algebra, Trigonometrie, Geometrie oder Differenzial- und Integralrechnung benötigt werden. (Weltgesundheitsorganisation 2005)
- 2) „Schüler, bei denen eine Entwicklung mathematischer Fähigkeiten mehr oder minder stark behindert ist und der Aufbau eines Verständnisses für Mathematik nicht gelingt“ (Schulz 1995 nach Krajewski 2003, S.18).
- 3) „Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen von Mathematik sind mit den ihnen gegenwärtig verfügbaren Strategien der Informationsverarbeitung entwicklungsbedingt und/oder infolge ungünstiger äußerer Einflüsse (didaktischer oder sozial-emotionaler Art) noch nicht bzw. unzureichend in der Lage, sich mathematische Grundlagen wie etwa Zahlvorstellung, Zahlbegriff, Einsicht in das Stellenwertsystem oder Normalverfahren zu den vier Grundrechnungsarten anzueignen. Sie bedürfen daher einer besonderen Förderung, die über das normale Maß des Unterrichts hinausgeht.“ (Ganser 2004, S.7).
- 4) „[Rechenschwäche wird definiert als] kumulierte und durch partielle Förderung nicht behebbare negative Lernbiographie, wobei die dünne und fehlerhafte Wissensbasis einen Lernzuwachs durch den alltäglichen Unterricht verhindert“ (Lorenz, Radatz 2005, S. 26).
- 5) „Es wird somit angenommen, dass erst dann von einer Lernstörung gesprochen werden kann, wenn eine Schülerin oder ein Schüler trotz gutem Unterricht kaum Lernfortschritte erzielt. [...] Schülerinnen und Schüler gelten dann als besonders förderungsbedürftig, wenn sich a) ihre Leistungen und b) ihr Lernfortschritt signifikant von dem ihrer Kameradinnen und Kameraden unterscheiden.“(Moser Opitz 2007, S.21)
- 6) Rechenschwäche ist demnach auf der Ebene des kindlichen Denkens ein klar beschreibbarer Zusammenhang von Fehlvorstellungen, fehlerhaften Denkweisen und letztlich nicht zielführenden Lösungsmustern zu den „einfachsten“ mathematischen Grundlagen. Die mathematischen Vorstellungen und Denkweisen der Kinder stehen dabei vom ersten Tag an in Wechselwirkung zum „System Schule“ einerseits, [und] zu den Reaktionen von Eltern, Großeltern, Freunden...andererseits. [...] (vgl. Gaidoschik 2002, S. 13).
- 7) „Lese-, Schreib- und Rechenstörungen gehen mit psychischen Störungen einher. Legasthenische Kinder beispielsweise fallen aggressiv auf. Kinder mit Rechenstörungen sind ängstlich oder depressiv. Beide Phänomene werden von der Fachwelt mit Reifungsverzögerungen im Gehirn erklärt“ (Der Bund 1999 nach Moser Opitz 2004, S. 179).
- 8) Wenn ich Zahlen höre, die einfachsten Rechnungen, die muss ich einfach, einfach mit den Fingern irgendwie nachrechnen. Weil es mir... ja ich komme dann einfach nicht mehr draus....Also ich hab ja auch Dyskalkulie in der Mathe. [...] Ja also ich finde es einfach jeweils blöd, wenn ich irgendwie, wenn mich die Lehrer/in etwas fragt, eine ganz leichte Rechnung und dann weiß ich sie nicht. [...] Und dann komme ich dann irgendwie so in ein Zeug hinein, dass ich irgendwie dann gar nichts mehr weiß. (Achtklässlerin, vgl. Moser Opitz 2004, S. 181)
- 9) A. Mathematical ability, as measured by individually administered standardized tests, is substantially below that expected given the person's chronological age, measured intelligence, and age-appropriate education.
B. The disturbance in Criterion A significantly interferes with academic achievement or activities of daily living that require mathematical ability.
C. If a sensory deficit is present, the difficulties in mathematical ability are in excess of those usually associated with it. (American Psychiatric Association 1994).

Literatur zu Definitionszitaten

- American Psychiatric Association 1994 : DSM IV: Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders, Fourth Edition, Text Revision –<http://www.behavenet.com/capsules/disorders/mathematicsdis.htm>
- Gaidoschik, Michael (2002): Rechenschwäche - Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für Lehrer/innen und Eltern. Wien: öbv & hpt
- Ganser, Bernd (Hg.): Rechenstörungen. Hilfen für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen der Mathematik. 5., überarb. und erw. Aufl. Donauwörth: Auer
- Krajewski, Kristin (2003): Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Kovac.
- Lorenz, Jens Holger; Radatz, Hendrik (Hg.) (2005): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. 7. Aufl. Hannover: Schroedel.
- Moser Opitz, Elisabeth: Dyskalkulie: Krankheit, Erfindung, Mythos, Etikett..? In: Zeitschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete 73, Heft 2, S.179-190
- Weltgesundheitsorganisation 2005: Internationale Klassifikation psychischer Störungen. ICD 10 Kapitel V <http://www.dimdi.de/static/de/klassi/diagnosen/icd10/htmlsgbv20/fr-icd.htm?gf80.htm>

Psychodiagnostik

Identifikation von Variablen, die die Rechenleistung bestimmen

- Gedächtnis
- Raumanschauung
- Sprachfunktionen

Neuropsychologie

Analyse der für das Rechnen relevanten allgemeinen kognitiven Faktoren

- Störungen im taktil-kienästhetischen Bereich
- Störungen der auditiven Wahrnehmung, Speicherung und Serialität
- Störungen der visuellen Wahrnehmung, Speicherung und Serialität
- Störungen der Intermodalität

Fehleranalyse

Analyse beobachteter Schülerfehler

→ Klassifikation

→ Schwierigkeitsstufung

allgemeine (Fehl-)Strategien der Informationsaufnahme/-verarbeitung

- mangelndes Sprach-/Textverständnis
- Schwierigkeiten bei der Analyse von Veranschaulichungen
- Ähnlichkeitsfehler

Kognitionspsychologie

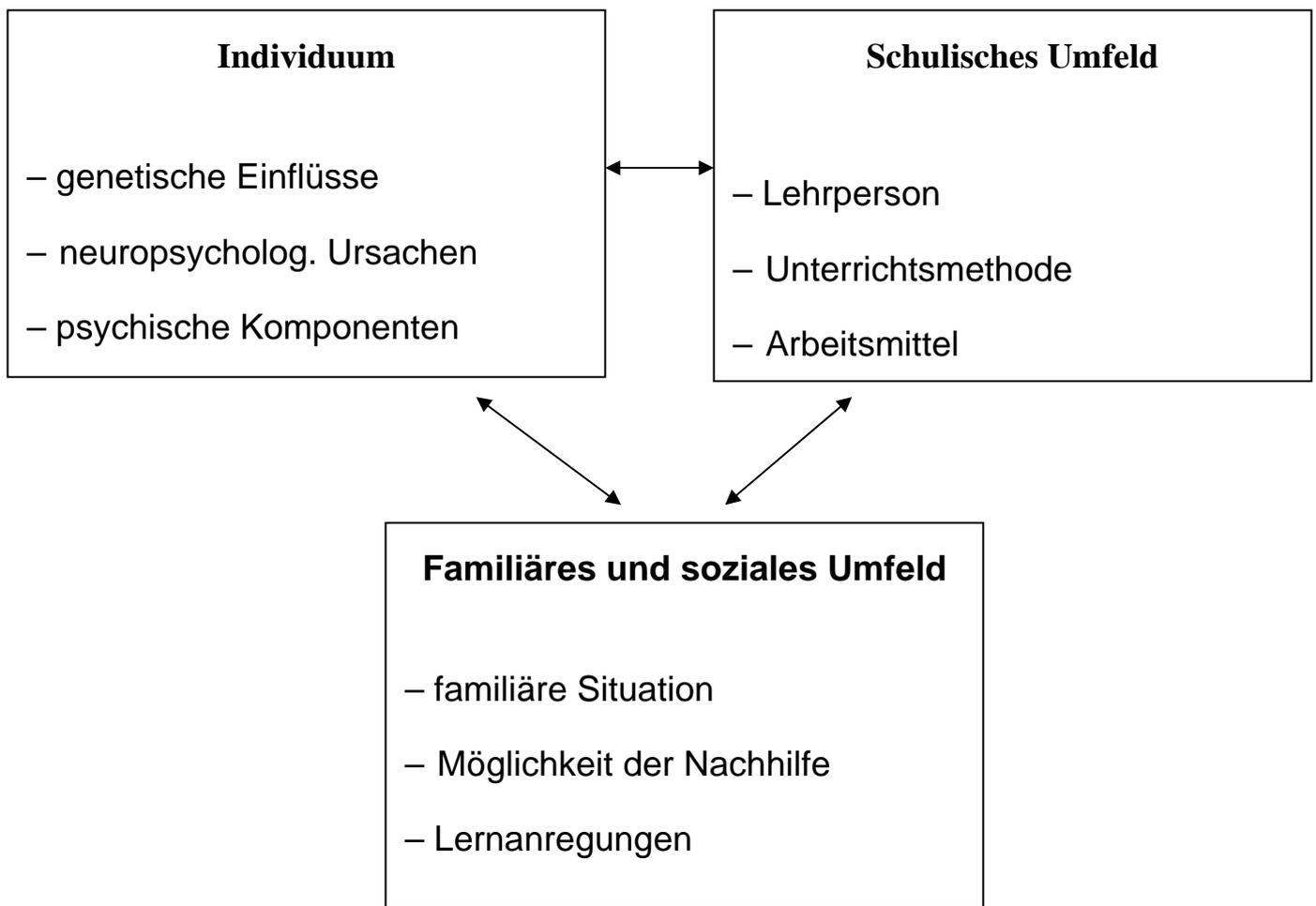
Erklärungen des mathematischen Verstehens und des Begriffserwerbs

→ Identifikation von Störbereichen

Systemische Ansätze

Integrierende Modelle

→ Betonung der Wechselwirkungen der unterschiedlichen Faktoren



Arbeitsfragen für die schriftliche Ausarbeitung:

- Was ist der Schwerpunkt des Interviews/der Beobachtung? Welche Bereiche sollen erfasst werden und warum?
- Wie sind Sie gerade zu diesen Kindern gekommen? Welche Informationen hatten Sie vor Durchführung des Interviews/der Beobachtung? Welchen Einfluss hatte dies auf die Konstruktion des Interviews/der Beobachtung?
- Was bezwecken Sie mit der jeweiligen Aufgabe/Situation für die Beobachtung, was haben Sie sich dabei gedacht, warum eignet sich diese Aufgabe/Situation vielleicht besser als eine andere?
- Woher stammen die Ideen für die Aufgaben? Wenn sie von Vorlagen angeregt wurden, warum haben Sie genau diese Aufgaben ausgewählt und ggf. welche Anpassungen haben Sie vorgenommen?
- Welche Aufgabe soll was zeigen?
- Wieso haben Sie die Aufgaben in dieser Reihenfolge gewählt? Wieso haben Sie die Beobachtungssituation genau so gestaltet?
- Welche Hilfen/Anregungen für die Kinder haben Sie vorgesehen? Welche Variationen des Konzeptes haben Sie vorher durchdacht, um ggf. auf die Kinder angemessen reagieren zu können?

Arbeitsfragen für die Vorbereitung des Kolloquiums

- Wie ist das Interview/die Beobachtung verlaufen?
- Wie haben die Kinder sich verhalten, was haben sie gezeigt? Wie ist die Leistung der Kinder zu interpretieren? (ggf. unter Rückgriff auf Transkriptionsausschnitte)
- Hat sich das Interview/die Beobachtung für den gewählten Schwerpunkt bewährt? Was war besonders gelungen? Was hätte anders geplant werden sollen?
- Waren die Aufgaben angemessen für das Kind? Waren die Aufgaben angemessen für Erkenntnisse zum gewählten Schwerpunkt?
- An welchen Stellen im Verlauf des Interviews/der Beobachtung hätte man noch anders reagieren sollen? Warum?

Grundlage aller Aussagen ist der ausgefüllte Protokollbogen und die dazugehörige Transkription. Die Auswertung dieser Unterlagen bedeutet nicht etwa, der Reihe nach alles zu beschreiben, was die Kinder getan haben, sondern stattdessen inhaltlich zusammenzufassen, zu interpretieren und zu vergleichen.

Das Wissen um das Vorgehen des Kindes sollte also zwar durchaus ausführlich und detailliert sein, aber nicht in Form eines memorierten Ablaufes, sondern inhaltlich derart strukturiert, dass die Darstellung der Hauptkenntnisse präzise und auf die zentralen Punkte hin begründet gelingen kann. Alle Aussagen sollten durch Bezug auf die Transkription, bzw. einzelne Auszüge daraus, begründbar sein.

Aufgabe Protokollbogen

(am Beispiel eines Interviewleitfadenausschnittes aus einem Seminar an der Bremer Universität)

Aufgabe:

In der nächsten Sitzung soll ein Ausschnitt aus einer Lernstandserhebung Arithmetik Klasse 1 protokolliert werden.

Entwickeln Sie bitte einen passenden Protokollbogen für die folgenden Bereiche (Ausschnitt aus dem Interviewleitfaden)!

Bitte beachten:

In Abhängigkeit vom Interviewverlauf können Abweichungen von der Reihenfolge der Aufgaben bzw. bei der Wahl der Zahlenbeispiele auftauchen. Ggf. werden auch zusätzliche Aufgaben aufgenommen.

Leitfadenausschnitt:

Bereich Zählen

- Wie weit kannst Du zählen?
- Ab einer bestimmten Zahl weiterzählen (ggf. Hilfe anbieten: Startzahl nennen);
- Rückwärtszählen
- Zählen in 2er-/5er-/10er-Schritten (vorwärts; rückwärts)

Bereich Addition / Subtraktion (kontextfrei; mündlich gestellt)

- Addition:

$$4+3$$

$$2+7$$

Verdopplungsaufgaben (Beginn mit 4+4)

$$8+5$$

$$9+5$$

$$6+11$$

$$[17+8]$$

- Subtraktion:

$$5-3$$

$$15-3$$

14-5 (falls hier Schwierigkeiten: 9-6 als letzte Aufgabe)

$$14-9$$

$$[22-4]$$

Literaturliste

Mathematischen Entwicklung (im Vorschulalter)

- Aebli, Hans (1961): Grundformen des Lehrens. Ein Beitrag zur psychologischen Grundlegung der Unterrichtsmethode. Stuttgart: Klett.
- Baroody, Arthur J.; Dowker, Ann (Hg.) (2003): The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptive expertise. Mahwah, NJ u.a.: Erlbaum.
- Besuden, Heinrich (1999): Raumvorstellung und Geometrieverständnis. In: Mathematische Unterrichtspraxis, Jg. 20, H. 3, S.1-10.
- Caluori, Franco (2004): Die numerische Kompetenz von Vorschulkindern. Theoretische Modelle und empirische Befunde. Hamburg: Dr. Kovac.
- Copley, Juanita V. (Hg.) (2004): Mathematics in the early years. 3. print. Reston.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fritz, A.; Ricken, G. (2005): Früherkennung von Kindern mit Schwierigkeiten im Erwerb von Rechenfertigkeiten. In: Hasselhorn, Marcus (Hg.): Diagnostik von Mathematikleistungen. Göttingen.: Hogrefe.
- Frostig, Marianne; Horne, David; Reinartz, Anton; Reinartz, Erika; Sander, Elisabeth (1972): Wahrnehmungstraining. Dortmund: Crüwell .
- Fuson, Karen C. (1988): Children's counting and concepts of number. New York, Berlin: Springer.
- Gelman, Rochel; Gallistel, C. R. (1978): The child's understanding of number. Cambridge: Harvard Univ. Pr.
- Grassmann, Marianne (2002): Mathematische Kompetenzen von Schulanfängern. Potsdam: Universitätsverl. Potsdam.
- Grassmann, Marianne (2005): Im Kindergarten Mathematik unterrichten? In: Grundschule, Jg. 37, H. 1, S.20-23.
- Grassmann, Marianne; Mirwald, Elke (1997): Hohe mathematische Kompetenzen von Schulanfängern - Was nun? Plädoyer für einen veränderten Schulanfang im Lernbereich Mathematik. In: Grundschulunterricht, Jg. 44, H. 5, S.33-35.
- Grube, Dietmar (2005): Entwicklung des Rechnens im Grundschulalter. Basale Fertigkeiten, Wissensabruf und Arbeitsgedächtniseinflüsse. Münster: Waxmann.
- Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.) (2006): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren]. Offenburg: Mildenberger.
- Hasemann, Klaus (2001): "Zähl' doch mal!" Die numerische Kompetenz von Schulanfängern. In: Sache, Wort, Zahl, Jg. 29, H. 35, S.53-58.
- Hasemann, Klaus (2004): Mathematische Erfahrungen und Aktivitäten in der Vorschulzeit. In: Grundschulunterricht, Jg. 51, H. 7-8, S.15-20.
- Hasemann, Klaus (2006): Frühkindliche mathematische Bildung: Spielen, Fördern, Lernen. In: Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren]. Offenburg: Mildenberger, S.67-79.
- Hasselhorn, Marcus (Hg.) (2005): Diagnostik von Mathematikleistungen. Göttingen: Hogrefe.
- Heide, Lili (2005): Flexible Strategien - beobachtet im letzten Kindergartenjahr. In: Grundschulunterricht, Jg. 52, H. 7-8, S.28-31.
- Hoffmann, Brigitte (2001): Wofür gibt es denn Zahlen? Die Bildung des Zahlbegriffs und die Einsicht in Rechenoperationen anbahnen. In: Grundschulmagazin, Jg. 69, H. 1-2, S.53-56.
- Käpnick, Friedhelm; Fuchs, Mandy (2006): Fallbeispiele zur frühkindlichen Entwicklung kleiner Matheasse. In: Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren]. Offenburg: Mildenberger, S.186-199.
- Krajewski, Kristin (2005): Vorschulische Mengenbewusstheit von Zahlen und ihre Bedeutung für die Früherkennung von Rechenschwäche. In: Hasselhorn, Marcus (Hg.): Diagnostik von Mathematikleistungen. Göttingen.: Hogrefe, S.49-70.
- Krajewski, Kristin; Schneider, Wolfgang (2006): Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht, Jg. 53, H. 4, S.246-262.
- Lurija, Aleksandr R. (1992): Das Gehirn in Aktion. Einführung in die Neuropsychologie. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.
- Möller, Regina; Sasse, Ada (2005): Entwicklung mathematischer Kompetenzen im Elementarbereich. Historische und systematische Aspekte. In: Sache, Wort, Zahl, Jg. 33, H. 73, S.30-40.
- Munn, Penny (2001): Childrens beliefs about counting. In: Thompson, Frederick Ian (Hg.): Teaching and learning early number. Buckingham: Open Univ. Press.
- Piaget, Jean; Szeminska, Alina (1975): Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Stuttgart: Klett.
- Resnick, L.B. (1989): Developing mathematical knowledge. In: American Psychologist, H. 44, S.162-169.
- Schipper, Wilhelm (1996): Kompetenz und Heterogenität im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Die Grundschulzeitschrift, Jg. 10, H. 96, S.11-15.

- Selter, Christoph (1995): Zur Fiktivität der "Stunde Null" im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Mathematische Unterrichtspraxis, Jg. 16, H. 2, S.11-10.
- Stern, Elsbeth (2005): Kognitive Entwicklungspsychologie des mathematischen Denkens. In: Aster, Michael von; Lorenz, Jens Holger (Hg.): Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht, S.137-149.
- Weinhold Zulauf, Monika; Schweiter, Martin; Aster, Michael von (2003): Das Kindergartenalter: Sensitive Periode für die Entwicklung numerischer Fertigkeiten. In: Kindheit und Entwicklung, Jg. 12, H. 4, S.222-230.
- Wember, F. (2003): Die Entwicklung des Zahlbegriffs aus psychologischer Sicht. In: Fritz, Annemarie; Ricken, Gabi; Schmidt, Siegbert (Hg.): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch. Weinheim: Beltz, S.48-64.

Lernschwierigkeiten

- Aster, Michael von (2003): Neurowissenschaftliche Ergebnisse und Erklärungsansätze zu Rechenstörungen. In: Fritz, Annemarie; Ricken, Gabi; Schmidt, Siegbert (Hg.): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch. Weinheim: Beltz.
- Aster, Michael von; Lorenz, Jens Holger (Hg.) (2005): Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht.
- Eberle, Gerhard; Kornmann, Reimer (Hg.) (1996): Lernschwierigkeiten und Vermittlungsprobleme im Mathematikunterricht an Grund- und Sonderschulen. Möglichkeiten der Vermeidung und Überwindung. Weinheim: Dt. Studien-Verl.
- Fritz, Annemarie; Ricken, Gabi; Schmidt, Siegbert (Hg.) (2003): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch. Weinheim: Beltz.
- Gaidoschik, Michael (2002): Rechenschwäche - Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für Lehrer/innen und Eltern. Wien: öbv & hpt
- Germann, Elke (2004): Endlich wissen wir, was sie hat: Dyskalkulie! In: Grundschule, Jg. 36, H. 9, S.50-52.
- Grassmann, Marianne (2001): Wenn Kinder uns überraschen - einige Gedanken zu verschiedenartigen "Verhaltensauffälligkeiten" im Mathematikunterricht. In: Grundschulunterricht, Jg. 48, H. 12, S.8-12.
- Jacobs, Claus; Petermann, Franz (2005): Diagnostik von Rechenstörungen. In: Hasselhorn, Marcus (Hg.): Diagnostik von Mathematikleistungen. Göttingen: Hogrefe, S.71-104.
- Krajewski, Kristin (2003): Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg: Kovac.
- Lorenz, Jens Holger (2003): Überblick über Theorien zur Entstehung und Entwicklung von Rechenschwäche. In: Fritz, Annemarie; Ricken, Gabi; Schmidt, Siegbert (Hg.): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch. Weinheim: Beltz, S.144-162.
- Lorenz, J.H. (2003): Rechenschwäche - ein Problem der Schul- und Unterrichtsentwicklung. In: Baum, Monika; Wielpütz, Hans; Bauersfeld, Heinrich (Hg.): Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch. Seelze: Kallmeyer, S.103-120.
- Menne, Julie (1999): Effektiv Üben mit rechenschwachen Kindern. In: Die Grundschulzeitschrift, Jg. 13, H. 121, S.18-21.
- Moser Opitz, Elisabeth (2001): Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen. Bern: Haupt.
- Moser Opitz, Elisabeth (2004): Dyskalkulie: Krankheit, Erfindung, Mythos, Etikett...? In: Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, H. 2, S.179-190.
- Moser Opitz, Elisabeth (2007): Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern: Haupt.
- Rechenschwäche : Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. Ein Handbuch (2003). Weinheim u.a.: Beltz.
- Schipper, Wilhelm (2002): Das Dyskalkulie-Problem. In: Die Grundschulzeitschrift, Jg. 16, H. 158, S.48-51.
- Schrodi, Franz (2002): Wie erklären Lehrer Lernprobleme im Mathematikunterricht? In: Grundschule, Jg. 34, H. 5, S.29-30.

Diagnose

- Aster, Michael von; Weinhold Zulauf, Monika; Horn, Ralf (2006): Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern. ZAREKI-R ; Manual. 2., korr. Aufl. Frankfurt am Main: Harcourt Test Services.
- Barth, Karlheinz (2006): Früherkennung und Prävention von Lernstörungen. Möglichkeiten und Grenzen diagnostischer und präventiver Ansätze in der Früherkennung von Lernstörungen. In: Frühförderung interdisziplinär, Jg. 25, H. 4, S.169-186.
- Behring, Karin; Kretschmann, Rudolf; Dobrindt, Yvonne (1999): Prozessdiagnose mathematischer Kompetenzen in den Schuljahren 1 und 2. Horneburg: Persen.
- Freitag, G. u.a. (2004): Standardisierte Testverfahren. In: Ganser, Bernd (Hg.): Rechenstörungen. Hilfen für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen der Mathematik. 5., überarb. und erw. Aufl. Donauwörth: Auer, S.72-92.

- Fritz, Annemarie (2003): Bedingungsvariationen und Fehleranalyse als Beobachtungszugänge zur Diagnostik arithmetischer Kompetenz. In: Fritz, Annemarie; Ricken, Gabi; Schmidt, Siegbert (Hg.): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch. Weinheim: Beltz, S.283–308.
- Görllich, Ruth (2005): Kim - ein Kind zwischen zwei Welten. Rechenstörungen bei einem Migrantenkind. In: Die Grundschulzeitschrift, Jg. 19, H. 182, S.15–18.
- Graf, Ulrike (Hg.) (2007): Diagnostik und Förderung im Elementarbereich und Grundschulunterricht. Lernprozesse wahrnehmen, deuten und begleiten. Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.
- Grüßing, Meike (2006): Übergänge erkunden und gestalten. In: Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren]. Offenburg: Mildenerger, S.122–132.
- Grüßing, Meike; May, Margarete; Peter-Koop, Andrea (2007): Von diagnostischen Befunden zu Förderkonzepten. Mathematische Frühförderung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule. In: Sache, Wort, Zahl, Jg. 35, H. 83, S.50–55.
- Hasemann, Klaus (2005): Der Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung. Ein Diagnoseinstrument vor dem Schulbeginn. In: Grundschule, Jg. 37, H. 10, S.38–39.
- Heide, Lili (2005): Flexible Strategien - beobachtet im letzten Kindergartenjahr. In: Grundschulunterricht, Jg. 52, H. 7-8, S.28–31.
- Kaufmann, Sabine (2003): Defizitäre visuelle Fähigkeiten: Risikofaktoren beim Rechnenlernen? Ergebnisse einer Untersuchung. In: Grundschule, Jg. 35, H. 4, S.14–16.
- Kaufmann, Sabine (2003): Früherkennung von Rechenstörungen in der Eingangsklasse der Grundschule und darauf abgestimmte remediale Maßnahmen. Frankfurt am Main: Lang.
- Kaufmann, Sabine (2006): Früherkennung von Rechenstörungen und entsprechende Fördermaßnahmen. In: Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren]. Offenburg: Mildenerger, S.160–168.
- Krajewski, Kristin; Küspert, Petra; Schneider, Wolfgang (2002): Deutscher Mathematiktest für erste Klassen. DEMAT 1+ ; Manual. Göttingen: Belz Test (Deutsche Schultests).
- Kretschmann, Rudolf (2006): „Pädagnostik“ - Optimierung pädagogischer Angebote durch differenzierte Lernstandsdiagnosen, unter besonderer Berücksichtigung mathematischer Kompetenzen. In: Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren]. Offenburg: Mildenerger, S.29–54.
- Lorenz, Jens Holger (2003): Aufgaben zur Eingangs- und unterrichtsbegleitenden Diagnostik. Früherkennung von Rechenstörungen in Klasse 1 und 2. In: Praxis Grundschule, Jg. 26, H. 3, S.18–26.
- Lorenz, Jens Holger (2003): Diagnostik mathematischer Fähigkeiten in Klasse 1 und 2. In: Grundschule, Jg. 35, H. 5, S.19–21.
- Lorenz, Jens Holger (2003): Eingangsdiagnostik im Mathematikunterricht. In: Grundschule, Jg. 35, H. 5, S.14–18.
- Lorenz, Jens Holger (2006): Förderdiagnostische Aufgaben für Kindergarten und Anfangsunterricht. In: Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren]. Offenburg: Mildenerger, S.55–66.
- Moser Opitz, Elisabeth; Schmassmann, Margret (2002): Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch. Hinweise zur Arbeit mit Kindern mit mathematischen Lernschwierigkeiten. Zug: Klett u. Balmer.
- Moser Opitz, Elisabeth (2006): Förderdiagnostik: Entstehung - Ziele - Leitlinien - Beispiele. In: Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren]. Offenburg: Mildenerger, S.10–28.
- Peter-Koop, Andrea (2006): Zur Diagnostik von Lernausgangslagen im Mathematikunterricht. In: PÄD-Forum: unterrichten, erziehen, Jg. 34, H. 2, S.103–106.
- Peter-Koop, Andrea; Wollring, Bernd; Spindeler, Birgitte; Grüßing, Meike (2007): Elementarmathematisches Basisinterview. Offenburg: Mildenerger.
- Ricken, Gabi (2003): Psychometrische und entwicklungsorientierte Verfahren zur Diagnostik des Rechnens. In: Fritz, Annemarie; Ricken, Gabi; Schmidt, Siegbert (Hg.): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch. Weinheim: Beltz, S.260–282.
- Rottmann, Thomas; Huth, Christine (2005): Zwei Diagnose-Tests im Test. In: Die Grundschulzeitschrift, Jg. 19, H. 182, S.32–33.
- Stern, Elsbeth (2003): Früh übt sich. Neuere Ergebnisse aus der LOGIK-Studie zum Lösen mathematischer Textaufgaben: Rechenschwäche : Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. Ein Handbuch. Weinheim: Beltz, S.116–130.
- Strehl, Reinhard (2002): Zahlen und Rechenaufgaben in Kinderbildern aus dem 1. Schuljahr. In: Grundschulunterricht, Jg. 49, H. 10, S.2–6.
- Rijdt, Bernadette A. M. van de; Luit, Johannes E. H. van.; Hasemann, Klaus (2000): Zur Messung der frühen Zahlbegriffsentwicklung. In: Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und pädagogische Psychologie, Jg. 32, H. 1, S.14–24.
- Weinhold Zulauf, Monika; Schweiter, Martin; Aster, Michael von (2003): Das Kindergartenalter: Sensitive Periode für die Entwicklung numerischer Fertigkeiten. In: Kindheit und Entwicklung, Jg. 12, H. 4, S.222–230.

- Weißhaupt, Steffi; Peucker, Sabine; Wirtz, Markus (2006): Diagnose mathematischen Vorwissens im Vorschulalter und Vorhersage von Rechenleistungen und Rechenschwierigkeiten in der Grundschule. In: *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, Jg. 53, H. 4, S.236–245.
- Werner, Birgit (1999): Rechenschwäche - oder nicht geförderte Fähigkeiten. Diagnose- und Förderungsmöglichkeiten von Kindern mit Schwierigkeiten in Mathematik. In: *Zeitschrift für Heilpädagogik*, Jg. 50, H. 10, S.471–475.
- Werner, Birgit (2003): Förderdiagnostisch orientierte Verfahren für den Mathematikunterricht. In: *Zeitschrift für Heilpädagogik*, Jg. 54, H. 8, S.324–331.

Pädagogische Möglichkeiten

- Benz, Christiane (2006): Mit vielen Büchern ins erste Schuljahr. Möglichkeiten zur Differenzierung und zum entdeckenden Lernen in den ersten Schulwochen. In: *Die Grundschulzeitschrift*, Jg. 20, H. 195-196, S.16–20.
- Besuden, Heinrich (2003): Rechnen mit Eierkartons. In: *Grundschule*, Jg. 35, H. 5, S.51–54.
- Besuden, Heinrich (2006): Raumvorstellung als Ziel. Geeignete Aufgaben für den Geometrieunterricht. In: *Grundschulmagazin*, Jg. 74, H. 5, S.23–28.
- Brügelmann, Hans (1992): Geschlossene Gehirne und offener Unterricht. In: *Die Grundschulzeitschrift*, H. 54, S.2–3.
- Bruner, Jerome S.; Hartung, Arnold (1974): Entwurf einer Unterrichtstheorie. Berlin: Berlin-Verl. [u.a.] (Sprache und Lernen, 5).
- Diemer-Hohnholz, Erika (2005): Mathematik im Alltag von Kindern. Mathematische Strukturen entdecken und verstehen. In: *Grundschule*, Jg. 37, H. 10, S.40–43.
- Dolenc, Ruth (2005): Zahlenzauberei - Handreichung mit Materialien. Mathematik für Kindergarten und Grundschule. 1. Aufl., [u.a.]. Oldenbourg: Schulbuchverl.
- Dreyer, Petra; Schillert, Ruth (2007): König Plus und Rabe Minus. Zahlen, Formen, Mengen ; Kinder erwerben spielerisch mathematische Vorläuferfertigkeiten in Kindergarten und Schuleingangsbereich. Münster: Ökotopia-Verl.
- Ellrott, Dieter (1998-): Erfolgreich lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe. Unter Mitarbeit von Barbara Aps-Ellrott. Hannover: Schroedel.
- Friedrich, Gerhard (2003): Die Zahlen halten Einzug in den Kindergarten. Ein Projekt zur mathematischen Frühförderung. In: *Kindergarten heute*, Jg. 33, H. 1, S.34–40.
- Friedrich, Gerhard (2006): Mathematik - ein Kinderspiel. Ergebnisse des Forschungsprojekts zur mathematischen Frühförderung. In: *Klein & groß*, H. 5, S.33–35.
- Friedrich, Gerhard; Bordihn, Andrea (2003): So geht's - Spaß mit Zahlen und Mathematik im Kindergarten. 1. Aufl. Freiburg: Herder (Kindergarten heute, Spot).
- Friedrich, Gerhard; Galgóczy, Viola de; Schindelbauer, Barbara (2006): Zahlenspiel und Zahlenspaß. 2. Aufl. Freiburg, Breisgau: Herder.
- Ganser, Bernd (Hg.) (2004): Rechenstörungen. Hilfen für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen der Mathematik. 5., überarb. und erw. Aufl. Donauwörth: Auer.
- Gerster, Hans-Dieter (1996): Vom Fingerrechnen zum Kopfrechnen- methodische Schritte aus der Sackgasse des zählenden Rechnens. In: Eberle, Gerhard; Kornmann, Reimer (Hg.): *Lernschwierigkeiten und Vermittlungsprobleme im Mathematikunterricht an Grund- und Sonderschulen. Möglichkeiten der Vermeidung und Überwindung*. Weinheim: Dt. Studien-Verl.
- Gerster, Hans-Dieter (2000): Wege zum nicht-zählenden Rechnen. In: *Grundschulunterricht*, Jg. 47, H. 7-8, S.33–35.
- Grassmann, Marianne (2005): Im Kindergarten Mathematik unterrichten? In: *Grundschule*, Jg. 37, H. 1, S.20–23.
- Grassmann, Marianne (2005): Mathematik in der Schuleingangsphase. In: *Grundschule*, Jg. 37, H. 10, S.28–30.
- Greine, Rita (2007): Das turbulente Zahlenhaus. Spielerischer Umgang mit Zahlen. In: *Klein & groß*, H. 2/3, S.22–23.
- Grohmann, Wolfgang (2006): Entwicklungsfördernde Lernumgebungen schaffen - Beispiel Mathematik. In: *Grundschulunterricht*, Jg. 53, H. 5, S.21–23.
- Hasemann, Klaus (2004): Mathematische Erfahrungen und Aktivitäten in der Vorschulzeit. In: *Grundschulunterricht*, Jg. 51, H. 7-8, S.15–20.
- Hülswitt, Kerensa Lee: Mit Fantasie zur Mathematik- freie Eigenproduktionen mit gleichem Material in großer Menge. In: Grüßing, Meike; Peter-Koop, Andrea (Hg.): *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten, fördern, dokumentieren]*. Offenburg: Mildenerger, S.103-121
- Jansen, Peter (2005): Individuelles kompetenzorientiertes Üben. In: *Grundschule*, Jg. 37, H. 5, S.34–37.
- Knyrim, Uta (2006): Woher kommen die Zahlen? Verschiedene Medien in einem fächerübergreifenden Mathematikunterricht. In: *Grundschule*, Jg. 38, H. 7-8, S.22–25.
- Krauthausen, Günter (1998): Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht der Grundschule. In: *Die Grundschulzeitschrift*, Jg. 12, H. 119, S.54–61.
- Krömke, V. (2004): Weg vom zählenden Rechnen - Wege zum operativen Rechnen. In: Krauthausen, Günter/Scherer, Petra (Hg.) (2004): *Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik. Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung*. Festschrift für Hartmut Spiegel. Donauwörth: Auer, S.83–91.
- Lehmann, Wolfgang; u.a. (2006): Viel + wenig, groß + klein. Riesenspaß bei der Förderung von mathematischen Vorläuferfähigkeiten. In: *Kindergarten heute*, Jg. 36, H. 11, S.6–14.
- Lorenz, Jens Holger (Hg.) (2003): *Lernschwache Rechner fördern. Ursachen der Rechenschwäche ; Frühhinweise auf Rechenschwäche ; diagnostisches Vorgehen*. Berlin: Cornelsen Scriptor (1. Aufl).

- Lorenz, Jens H. (1997): Über das Verstehen von Mathematik. In: Grundschule, Jg. 29, H. 10, S.26–28.
- Lorenz, Jens H. (1997): Über das Verstehen von Mathematik. In: Grundschule, Jg. 29, H. 10, S.26–28.
- Lorenz, Jens Holger (2003): Der leere Zahlenstrahl. Eine Hilfe fuer das Rechnen in der Grundschule. Primarstufe, 1.-4. Schuljahr. In: Mathematik lehren, H. 117, S.14–18.
- Lorenz, J.H. (2003): Über das Lernen arithmetischer Inhalte. In: Lorenz, Jens Holger (Hg.): Lernschwache Rechner fördern. Ursachen der Rechenschwäche ; Frühhinweise auf Rechenschwäche ; diagnostisches Vorgehen. Berlin: Cornelsen Scriptor (1. Aufl), S.22–41.
- Lorenz, Jens Holger (2005): Mathematische Bildung im Kindergarten. In: Grundschule, Jg. 37, H. 10, S.31–36.
- Lorenz, Jens Holger; Radatz, Hendrik (Hg.) (2005): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. 7. Aufl. Hannover: Schroedel.
- Krauthausen, Günter/Scherer, Petra (Hg) (2004): Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik. Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung. Festschrift für Hartmut Spiegel. Donauwörth: Auer
- Moser Opitz, Elisabeth (1999): Mathematischer Erstunterricht im heilpädagogischen Bereich: Anfragungen und Überlegungen. In: Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, Jg. 68, H. 3, S.293–307.
- Müller, Gerhard N. (2000): Mit Kindern rechnen. 2., unveränd. Aufl. Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule (Beiträge zur Reform der Grundschule, 96).
- Peter-Koop, Andrea; Grüßing, Meike (2007): Mit Kindern Mathematik erleben. 1.Aufl. Seelze: Lernbuch-Verl. bei Friedrich in Velber.
- Schaarschmidt, Monika (2005): Hokus, pokus, eins, zwei, drei, Zaubereien mit Zahlen. Ein Projekt zur mathematischen Bildung. In: Kindergarten heute, Jg. 35, H. 4, S.28–31.
- Scherer, Petra (2001): Aktivitaeten mit Ziffernkarten. Beziehungsreiches Lernen fuer alle Schuelerinnen und Schueler. In: Mathematik lehren, H. 105, S.12–15.
- Scherer, P. (2003): Produktives Mathematiklernen - auch in der Sonderschule?! In: Fritz, Annemarie; Ricken, Gabi; Schmidt, Siegbert (Hg.): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch. Weinheim: Beltz, S.415–428.
- Scherer, Petra (2005): Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Zwanzigerraum. Fördern durch Fordern. 1 Bände. Horneburg: Persen (Bergedorfer Förderdiagnostik, Bd. 1).
- Schipper, W. (2004): Von Handlungen zu Operationen: Entwicklung von Strategien des Kopfrechnens aus Handlungen an Materialien. In: Ganser, Bernd (Hg.): Rechenstörungen. Hilfen für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen der Mathematik. 5., überarb. und erw. Aufl. Donauwörth: Auer, S.191–203.
- Schipper, Wilhelm (2005): Schulische Prävention und Intervention bei Rechenstörungen. In: Die Grundschulzeitschrift, Jg. 19, H. 182, S.6–10.
- Selter, Christoph; Spiegel, Hartmut (1997): Wie Kinder rechnen. Stuttgart u.a.: Klett.
- Trickett, Liz; Sulke, Frankie (1993): Mathematikunterricht mit schulschwachen Kindern: Foerdern heisst fordern! In: Die Grundschulzeitschrift, Jg. 7, H. 68, S.35–38.
- Urban, Angelika (2003): Mein Zahlenbuch. Die Entwicklung von Zahlvorstellungen fördern. In: Grundschulmagazin, Jg. 71, H. 7-8, S.31–34.
- Wittmann, Erich Ch.; Müller, Gerhard N. (1990): Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart: Klett-Schulbuchverl. (Handbuch produktiver Rechenübungen / Erich Ch. Wittmann Gerhard N. Müller, Bd. 1).